Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf
Maximilian Wank 22.04.2014

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 2

Aufgabe 1: **(2+2) Punkte**

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von

$$f(x) := \frac{\sin(\log(x))}{x}, \qquad x \in (0, \infty).$$

(b) Berechnen Sie

$$\int_1^{e^\pi} \frac{\cos(\log(x))}{x^2}\, dx - \int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\log(x))}{x^2}\, dx.$$

Aufgabe 2: **(2+2) Punkte**

(a) Bestimmen Sie die Ableitungen von

$$f(x) := \log(1 + x^2), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{und}$$
$$g(x) := \arctan(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2}\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Aufgabe 3: **(1+3) Punkte**

Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie, dass dann $\varphi \circ f$ integrierbar ist und die Ungleichung

$$\varphi\Big(\tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx\Big) \leq \tfrac{1}{b-a} \int_a^b (\varphi \circ f)(x)\, dx$$

gilt. *Hinweis:* Analysis 1, Blatt 12.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Berechnen Sie für $a > 1$

$$\int_1^a \log(x)\, dx$$

als Grenzwert Riemannscher Zwischensummen.
Hinweis: Verwenden Sie für $j \in \{1, \ldots, p\}$ die Teilintervalle $I_j := \big[a^{\frac{j-1}{p}}, a^{\frac{j}{p}}\big]$.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Sei $f \in C^2([a,b])$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\Big| \int\limits_a^b f(x)\,dx - (b-a) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \Big| \leq \|f''\|_\infty \frac{(b-a)^3}{24}.$$

Hinweis: Verwenden Sie ein Taylorpolynom mit Lagrange'schem Restglied.