Blatt 2 (Riemannsche Geometrie)

Aufgabe 1: (a) Sei $p(x,\xi) := \frac{1}{2}\sum_{j,k} g^{jk}(x)\xi_j\xi_k$. Weiter sei $H_p = \partial_\xi p\,\partial_x - \partial_x p\,\partial_\xi$ das zu p assoziierte Hamilton'sche Vektorfeld und $\Phi_t = \exp tH_p$ der Hamilton'sche Fluss. Beweisen Sie, dass

$$\Phi_t(0,\xi) = (x(t),\xi(t)) \implies \Phi_{st}(0,\xi/s) = (x(t),\xi(t)/s). \tag{1}$$

(*Hinweis:* Zeigen Sie, dass beide Seiten das gleiche Anfangswertproblem lösen und verwenden Sie die Homogenität von p in ξ.)
(b) Beweisen Sie, dass

$$\Pi\Phi_1(0,\eta) = \eta + \mathcal{O}(|\eta|^2)$$

gilt, wobei Π die Projektion auf die x-Variable bezeichnet. (*Hinweis:* Setzen Sie $s = 1/t$ in (1) und leiten Sie nach t ab.)
(c) Beweisen Sie, dass $t \mapsto p(x(t),\xi(t))$ konstant ist.

Aufgabe 2: Definition: Ein *Vektorbündel* der Dimension d ist ein Tripel (E,π,M) bestehend aus differenzierbaren Mannigfaltikeiten E (Totalraum) und M (Basis), sowie einer differenzierbaren und surjektiven Abbildung $\pi : E \to M$ so, dass jede *Faser* $E_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in M$, die Struktur eines d-dimensionalen rellen Vektorraums trägt und die folgende Trivialitätsbedingung erfüllt ist: Für jedes $x \in M$ existiert eine Umgebung U und ein Diffeomorphismus

$$\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n,$$

so dass für jedes $y \in U$

$$\phi_y := \phi|_{E_y} : E_y \to \{y\} \times \mathbb{R}^n,$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

(a) Beweisen Sie, dass für eine beliebige n-dimensional differenzierbare Mannigfaltik M das Tangentialbündel TM sowie das Kotangentialbündel T^*M Vektorbündel der Dimension $2n$ sind.

(b) Bestimmen Sie TS^1, wobei $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Aufgabe 3: ("Heben und Senken der Indizes durch die Metrik".) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\flat : T_x\Omega \to T_x^*\Omega, \quad v \mapsto v_\flat = \xi,$$

die in lokalen Koordinaten gegeben ist durch $\xi = \xi_i dx^i$, wobei

$$\xi_i = g_{ij}(x)v^j,$$

ein Isomorphismus ist (Der sog. kanonische oder musikalische Isomorphismus), dass für $v = v^j \frac{\partial}{\partial x_j}, w = w^j \frac{\partial}{\partial x_j} \in T_x\Omega$

$$v_\flat(w) = \xi_j w^j = g_{ij}(x)v^j w^j$$

gilt, und dass der inverse Isomorphismus zu $\flat$ durch

$$\sharp : T_x^*\Omega \to T_x\Omega, \quad \xi \mapsto \xi^\sharp = v$$

gegeben, wobei $v = v^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ in lokalen Koordinaten, mit

$$v^i = g^{ij}(x)\xi_j.$$

Aufgabe 4: Sei $\kappa : U \to V$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ und $f : V \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die *zurückgezogene* Funktion (engl. pullback) ist definiert durch

$$f^* := \kappa^* f : U \to \mathbb{R}, \quad f^*(x) := f(\kappa(x)).$$

(a) Sei $v = v^j \frac{\partial}{\partial x_j} \in T_xU$ ein Tangentialvektor. Der *pushforward* von v ist gegeben durch $\kappa_* v := w = w^j \frac{\partial}{\partial y_j} \in T_yV$, mit

$$w^i = (\kappa'(x))_{ij}v^j, \quad y = \kappa(x).$$

Zeigen sie:

$$\kappa_* v(f^*) = v(f).$$

(b) Wie müssen Kotangentialvektoren unter Koordinatenwechsel transformieren? D.h. falls $\xi = \xi_j dx^j \in T_x^*U$ und $\eta = \eta_j dy^j \in T_y^*V$ Kovektoren sind, wie muss η_j gewählt werden, damit

$$\eta(v_*) = \xi(v)$$

gilt?

(c) Leiten Sie aus (a) und (b) die Transformationseigenschaften des Kotangentialbündels einer Mannigfaltigkeit ab. Folgern Sie, dass das Liouville-Mass $dxd\xi$ invariant unter Koordinatentransformation ist.

Jean-Claude Cuenin