Mathematisches Institut
der Universität München

Dr. J.-C. Cuenin

Blatt 1 (Temperierte Distribution und Fundamentallösungen)

Besprechung: Montag 6.5.2019

Erinnerung: Eine *temperierte Distribution* ist ein stetiges lineares Funktional $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. Dabei bedeutet Stetigkeit, dass $n \in \mathbb{N}_0$ und $c > 0$ existieren, so dass für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ die Ungleichung

$$|\langle T, f\rangle| \leq c \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq n} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|$$

gilt.

Aufgabe 1: (a) Zeigen Sie, dass jedes Polynom eine temperierte Distribution definiert.

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}, f\rangle := \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{f(x)}{x} \,\mathrm{d}\, x$$

eine temperierte Distribution definiert ist, und berechnen Sie deren Fouriertransformierte.

(c) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle \frac{1}{x \pm \mathrm{i}\, 0}, f\rangle := \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x \pm \mathrm{i}\,\epsilon} \,\mathrm{d}\, x$$

(d) Beweisen Sie die Formel

$$\frac{1}{x \pm \mathrm{i}\, 0} = \mathrm{p.v.}\frac{1}{x} \mp \mathrm{i}\, \pi\delta.$$

Aufgabe 2: (a) Zeigen Sie, dass

$$E(x) := \begin{cases} -((n-2)|S^{n-1}|)^{-1}|x|^{2-n} & n \geq 3, \\ (2\pi)^{-1} \ln |x| & n = 2, \end{cases}$$

eine Fundamentallösung des Laplace-Operators Δ in $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass durch $E(z) := (\pi z)^{-1}$, $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$, eine Fundamentallösung des Cauchy-Riemann-Operators $\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + \mathrm{i}\, \partial_y)$ ist.

Aufgabe 3: (a) Betrachten Sie den Poissonkern

$$P(x,y) := \frac{y}{(y^2+|x|^2)^{(n+1)/2}}, \quad (y,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n.$$

Bestimmen Sie Konstanten b_n so dass $\lim_{y\to 0+} b_n P(\cdot, y) = \delta$.
(b) Zeigen Sie, dass es Konstanten c_n gibt, so dass

$$E_+ := c_n H(t) \lim_{\epsilon\to 0+} \operatorname{Im}(|x|^2 - (t+\mathrm{i}\,\epsilon)^2)^{-(n-1)/2}, \quad n \geq 2,$$

eine Fundamentallösung des D'Alembert-Operators $\Box = \partial_t^2 - \Delta$ ist.

Jean-Claude Cuenin