

## 2.2. Die Fourier-Transform auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Worum geht es? Abstraktion von Differentiation und Faltung!

**Def:**  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d \exists C_{\alpha, \beta} > 0 : \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\beta \partial^\alpha f(x)| \leq C_{\alpha, \beta}\}$

**2.12. Definition** Für  $x, \xi \in \mathbb{R}^d$  sei  $x \cdot \xi := \sum_{j=1}^d x_j \xi_j$  das

Euklid. Standard-Skalarprodukt und für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

ist

$$\widehat{\varphi}(\xi) \equiv (\mathcal{F}\varphi)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} dx \, e^{-i\xi \cdot x} \varphi(x)$$

welchdef. (vgl. Satz 2.7(b)). ↑ "Fourier-Integral"

[Warnung: verschiedene Konv. in Literatur!]

**2.13. Satz** (Rechenregeln für  $\mathcal{F}$ ) Sei  $\varphi \in \mathcal{S}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$

(a)  $(\mathcal{D}^\alpha \widehat{\varphi})(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{(x^\alpha \varphi)}(\xi)$   $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$

(b)  $\widehat{(\mathcal{D}^\alpha \varphi)}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$

(c) für  $y \in \mathbb{R}^d$  sei  $\tau_y : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $\varphi \mapsto \varphi(\cdot - y)$

es gilt  $\widehat{(\tau_y \varphi)}(\xi) = e^{-i y \cdot \xi} \widehat{\varphi}(\xi)$

(d)  $\widehat{(e^{i y \cdot x} \varphi)}(\xi) = (\tau_y \widehat{\varphi})(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi - y)$

(e) für  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sei  $\sigma_\lambda : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $\varphi \mapsto \varphi(\lambda \cdot)$

es gilt  $\widehat{(\sigma_\lambda \varphi)}(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^d} (\sigma_{1/\lambda} \widehat{\varphi})(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^d} \widehat{\varphi}(\xi/\lambda)$

(f) für  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$  ist  $\varphi * \psi := \int_{\mathbb{R}^d} dx \varphi(x) \psi(\cdot - x) \in \mathcal{S}$

und es gilt  $\widehat{\varphi * \psi} = (2\pi)^{d/2} \hat{\varphi} \hat{\psi}$

(g)  $\widehat{\varphi \psi} = (2\pi)^{-d/2} \hat{\varphi} * \hat{\psi}$

Beweis.

NB: Das Fourier-Integral legt. glw. in  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ! (\*)

( )  $\Rightarrow$  Vertauschung von  $\mathcal{D}_\xi^\alpha$  mit  $\int$  erlaubt.

(a)  $(\mathcal{D}_\xi^\alpha \hat{\varphi})(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \underbrace{(\mathcal{D}_\xi^\alpha e^{-i\xi \cdot x})}_{(-i)^{|\alpha|} x^\alpha} \varphi(x)$

(b) Da  $\mathcal{D}^\alpha \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d$

darf man partiell integrieren

( )  $\int_{\mathbb{R}^d} dx e^{-i\xi \cdot x} (\mathcal{D}_x^\alpha \varphi)(x) = (-i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} dx \underbrace{(\mathcal{D}_x^\alpha e^{-i\xi \cdot x})}_{(-i)^{|\alpha|} \xi^\alpha e^{-i\xi \cdot x}} \varphi(x)$

(c), (d), (e) Übung, klar(!)

(f) Übung

(g) später



(\*)  $\frac{1}{|\xi - \xi'|} |\hat{\varphi}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi')| \leq \int_{\mathbb{R}^d} dx \frac{|1 - e^{i(\xi - \xi') \cdot x}|}{|\xi - \xi'|} \varphi(x)$  (höheres Nst. analog)  
 $\leq \frac{1}{|\xi - \xi'|} \int_{\mathbb{R}^d} dx C_{|\xi - \xi'|} x^2 \quad \text{mit } C_a \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$

2.14 Satz

$\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  ist linear und stetig

Becchi's (Exercise: work out the details!)

• sei  $\varphi \in \mathcal{S}$ , zeige  $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}$ .

- Satz 2.13 (a)  $\Rightarrow \mathcal{F}\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$

-  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d \Rightarrow$

$$\begin{aligned} i^{|\beta|} \xi^\beta (\mathcal{D}^\alpha \hat{\varphi})(\xi) &= i^{|\beta|} (-i)^{|\alpha|} \widehat{(x^\alpha \varphi)}(\xi) \xi^\beta \\ &= (-i)^{|\alpha|} \underbrace{(\mathcal{D}^\beta (x^\alpha \varphi))(\xi)}_{\psi \in \mathcal{S}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p_{\beta, \alpha}(\hat{\varphi}) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\hat{\psi}(\xi)| \leq \|\psi\|_{L^1} < \infty$$

• linear klar

• zeige Folgenstetigkeit in  $\hat{\varphi} = 0$  (Benutze Satz 2.7(a))

sei  $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{S}$  mit  $\tilde{p}_{j,m}(\varphi_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \forall j, m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d \Rightarrow p_{\beta, \alpha}(\hat{\varphi}_k) &\leq \int_{\mathbb{R}^d} dx \quad |\mathcal{D}^\beta (x^\alpha \varphi_k(x))| \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} dx \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{d+1}{2}}} \right) \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| (1+x^2)^{\frac{d+1}{2}} \mathcal{D}^\beta (x^\alpha \varphi_k(x)) \right|}_{\leq \text{const } \tilde{p}_{j, |\beta|}(\varphi_k)} \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

2.15. Lemma (Parseval-Formel)

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{S} : \int_{\mathbb{R}^d} dx \, \phi(x) \hat{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \, \hat{\phi}(x) \psi(x)$$

Beweis. Fubini (Exercise!)

2.16. Satz (Fourierischer Integralsatz für  $\mathcal{S}$ )

$$\forall \varphi \in \mathcal{S} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d\xi \, e^{i x \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) \quad (*)$$

"Fourier-Umkehrintegral"

Beweis

Strategie : • Regularisierung des Umkehrintegrals mit  $e^{-\frac{\varepsilon}{2} \xi^2}$

• Parseval-Formel

• approx.  $\delta$ -Fkt.

Sei  $\Phi(x) :=$  rechte Seite von (\*)

$$\text{Major. Kgr.} \Rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} d\xi \, e^{-\frac{\varepsilon}{2} \xi^2} e^{i x \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi)$$

$\underbrace{\quad}_{(\mathcal{T}_{-x} \varphi)(\xi)}$

Übungsaufg.  $\psi(x) := e^{-\varepsilon x^2/2} \Rightarrow$

$$\hat{\psi}(\xi) = \varepsilon^{-d/2} e^{-\frac{\xi^2}{2\varepsilon}}$$

Parseval

$$\Rightarrow \Phi(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\varepsilon^{-d/2}}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d\xi \, e^{-\frac{\xi^2}{2\varepsilon}} \varphi(\xi + x)$$

$$\gamma = \xi/\varepsilon \rightarrow \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} dy \frac{e^{-\gamma^2/2}}{(\sqrt{\pi})^{d/2}} \underbrace{\varphi(x + \varepsilon \gamma)}_{1.1 \leq \|\varphi\|_\infty}$$

$$\stackrel{\text{maj. Kgr.}}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dy \frac{e^{-\gamma^2/2}}{(\sqrt{\pi})^{d/2}}}_{1} \underbrace{\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varphi(x + \varepsilon \gamma)}_{\varphi(x)} = \varphi(x)$$

( ) 2.17. Definition Die Abbildung  $\mathcal{F}^*: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$   
 $\varphi \mapsto \check{\varphi}$

$$\check{\varphi}(x) := \frac{1}{(\sqrt{\pi})^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d\xi e^{i x \cdot \xi} \varphi(\xi)$$

heißt inverse Fourier-Transformation

2.18. Korollar  $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  ist bijektiv mit

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*, \text{ d.h. } \varphi = \check{\check{\varphi}} = \widehat{\widehat{\varphi}}$$

2.19. Satz (Parseval-Gleichung)

$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}$  gilt

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} dx \overline{\varphi(x)} \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} d\xi \overline{\widehat{\varphi}(\xi)} \widehat{\psi}(\xi) = \langle \widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \rangle$$

Beweis. Parseval-Formel mit  $\phi$  und  $\psi$ , wobei

$$\phi := \widehat{\widehat{\varphi}} = \check{\check{\varphi}} \Rightarrow \widehat{\widehat{\phi}} = \overline{\overline{\varphi}}.$$

### 2.3. Die Fourier-Transform auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ und $L^1(\mathbb{R}^d)$

2.20. Satz  $\exists$  unitärer linearer Operator  $F_2$  auf  $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\text{mit } F_2|_{\mathcal{Y}(\mathbb{R}^d)} = F \text{ und } F_2^{-1}|_{\mathcal{Y}(\mathbb{R}^d)} = F^{-1} = F^*$$

$F_2$  heißt  $L^2$ -Fourier-Transform (= Fourier-Plancherel-Transform)

Die Parseval-Gleichung gilt  $\forall \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ .

( ) Beweis.  $F$  linear, isometrisch auf  $\mathcal{Y}$  u.  $\mathcal{Y}$  dicht in  $L^2$  bzgl.  $\|\cdot\|_2$   
(Prove this!)

$\Rightarrow \exists$  lineare Fortsetzung  $F_2$  auf  $L^2$ , analog betrachte

$F_2^{-1}$  die unid. isometrische lineare Forts. von  $F^{-1}$

auf  $L^2$  und es gilt  $\forall \varphi \in L^2$ :

$$\begin{aligned} F_2^{-1} F_2 \varphi &= \lim_{u \rightarrow \infty} F_2^{-1} F_2 \varphi_u = \varphi = F_2 F_2^{-1} \varphi \\ &\quad \uparrow \quad \quad \quad \underbrace{F_2 \varphi_u}_{F^{-1} F \varphi_u} \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \text{analog} \\ &\quad ( \varphi_u )_u \subset \mathcal{Y} \quad \quad \quad \underbrace{F^{-1} F \varphi_u}_{\varphi_u} \\ &\quad \| \varphi - \varphi_u \| \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

und  $F_2, F_2^{-1}$  stetig

$$\Rightarrow F_2^{-1} F_2 = \mathbb{1} = F_2 F_2^{-1} \text{ (Notation } F_2^{-1} \text{ gerechtfertigt! )}$$

d.h.  $F_2$  unitär

Parseval auf  $L^2$  aus Satz 2.19. und Approx.,  
wie oben,

2.21. Bemerkung

adj. zu  $F_2$

$$(i) \text{ Parseval Glg. } \Rightarrow \langle \varphi, F_2^* F_2 \psi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

d.h.  $F_2^* = F_2^{-1}$  und die Notation  $F^{-1} = F^*$  auf  $\mathcal{Y}$   
macht Sinn!

(ii)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{1}{1+|x|^{3/4}} \in L^2(\mathbb{R})$

aber  $\int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\xi x} f(x)$  existiert für kein  $\xi \in \mathbb{R}$ !

$\Rightarrow$  Frage: wie wirkt  $\mathcal{F}_2$ ? Antwort: leicht ablesbar

2.22. Satz (Plancherel)

$\forall k > 0, \xi \in \mathbb{R}^d$  und  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$   
ist  $\widehat{f_k}(\xi) := (2\pi)^{-d/2} \int_{B_k(0)} dx e^{-i\xi \cdot x} f(x)$   
 $\uparrow$   
Ball um 0 in  $\mathbb{R}^d$   
mit Radius  $k$

wohldef. und es gilt

$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\widehat{f_k} - \mathcal{F}_2 f\|_2 = 0$

Beweis nur für  $\widehat{f_k}$  (für  $\check{f}_k$  analog!)

Sei  $g_k := f \chi_{B_k(0)} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$

$|f - g_k|^2 \leq |f|^2 \in L^1(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\text{dom. } L^2} \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - g_k\|_2 = 0$

Somit  $\|\mathcal{F}_2 g_k - \mathcal{F}_2 f\|_2 = \|\mathcal{F}_2 (g_k - f)\|_2 \stackrel{\text{Isometrie}}{=} \|g_k - f\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

und Betr. folgt aus

$\mathcal{F}_2 g_k = \widehat{f_k} \quad (*)$

Bew. von (\*):  $\forall \varphi \in \mathcal{Y} \quad \forall \psi \in L^2 \text{ gilt}$

$$\langle \varphi, \mathcal{F}_2 \psi \rangle = \langle \mathcal{F}_2^* \varphi, \psi \rangle$$

setze  $\psi = g_u$

$$\Rightarrow \langle \varphi, \mathcal{F}_2 g_u \rangle = (2\pi)^{-d/2} \int_{B_u(0)} dy \left( \int_{\mathbb{R}^d} dx e^{+i\gamma \cdot x} \varphi(x) \right) f(y)$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \overline{\varphi(x)} \underbrace{\int_{B_u(0)} dy e^{-i\gamma \cdot x} f(y)}_{\hat{f}_u(x)}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} dx \overline{\varphi(x)} \left[ (\mathcal{F}_2 g_u)(x) - \hat{f}_u(x) \right] = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{Y}$$

nächste Satz  $\Rightarrow \mathcal{F}_2 g_u(x) = \hat{f}_u(x) \text{ für l.e. f.a. } x \in \mathbb{R}^d$

2.23. Satz (Fundamentalsatz der Variationsrechnung)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein Gebiet,  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) := \{g: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar und } g \chi_K \in L^1(\Omega) \text{ für } K \subset \Omega \text{ kompakt}\}$

Falls

$$\int_{\Omega} dx \varphi(x) f(x) = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

$\Rightarrow f(x) = 0$  für l.e. f.a.  $x \in \Omega$ .

Beweis. mit Zweifelszettel von Riesz für

komplexes Maß  $\mu := \int dx f(x)$  auf  $K \subset \Omega$  (komp.)

Details: Lösung

2.24. Definition

- Fourier-Transf auf  $L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{F}_1 : L^1(\mathbb{R}^d) \ni \varphi \mapsto \mathcal{F}_1 \varphi := \hat{\varphi}$$

wo Sei

$\hat{\varphi}(\xi)$  durch 2.12 wohldef.  $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$  und es gilt

$$\|\hat{\varphi}\|_\infty \leq (2\pi)^{-d/2} \|\varphi\|_1 \quad (1)$$

- $C_0(\mathbb{R}^d) := \{ \varphi \in C(\mathbb{R}^d) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0 \}$

ist Banach-Raum bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$

2.25. Satz (Riemann-Lebesgue-Lemma)

$\mathcal{F}_1 : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$  ist linear u. stetig.

Beweis.

Wes  $\mathcal{F} : (S(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1) \rightarrow (S(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty) \subset (C_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$

ist linear und stetig wegen (1).

Satz über  
beschr.  
lin.  
Forts.

Da  $S(\mathbb{R}^d)$  dicht in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  bzgl.  $\|\cdot\|_1$   
 $\Rightarrow \exists$  stetige lineare Fortsetzung  $\tilde{\mathcal{F}} : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$   
die (1) erfüllt  $\Rightarrow$  Eindeutigkeit  $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_1$

2.26. Bemerkung

(i) Jedes  $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$  ist sogar glatt, stetig.

Für  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$  folgt glatt, Stetigkeit von  $\hat{\varphi}$  auch  
direkt aus (1).

(ii) Es gibt keine Parseval-Gly für  $F_1$ ,  
wohl aber die Parseval-Formel

(iii) Für  $F_1$  gilt Satz 2.13 (c) - (f);  
(a), (b), (g) gelten nur unter Zusatzvoraussetzungen

(iv)  $F_1$  in Satz 2.25 ist nicht surjektiv <sup>(\*)</sup>

2.27. Satz (Fouriersches Integralsatz für  $L^1$ )

( ) Sei  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und für  $\varepsilon > 0$  sei

$$\varphi_\varepsilon(x) := (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i x \cdot \xi} e^{-\varepsilon \xi^2/2} \hat{\varphi}(\xi) d\xi.$$

Dann gilt: (i)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_1 = 0$  und

(ii)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x)$  für bes. f. a.  $x \in \mathbb{R}^d$

Beweisidee

( ) Analog zu Satz 2.16 auf  $\mathcal{S}$ . Im 3. Schritt verwende

für (i) Lemma I.3.48, für (ii) ein analoges f.ä.

Resultat (kompliziert!)

(\*)

siehe z.B. Kolmogorov / Fomin, Elements of the theory of functions, Graylock Press, 1957, Sect. VIII.4.7.