Mathematisches Institut der Universität München, WISE 2019/20

Übungen zur Mathe III für Physiker

Prof.Dr.P.Pickl

Blatt 3

Aufgabe 1:

Diskutieren Sie qualitativ aber möglichst ausführlich das Vektorfeld und die Integralkurven für das eindimensionale physikalische Pendel ($m, k > 0$), dessen Bewegung durch die DGL

$$m\ddot{x} = -ksinx$$

bestimmt wird. Achten Sie besonders auf die kritischen Punkte des Vektorfeldes.

Aufgabe 2: Für eine reelle $n \times n$ Matrix A sei auf dem Phasenraum $\mathbb{R}^n$ die DGL

$$\dot{x} = Ax$$

gegeben. Das Liouvillesche Theorem in der Hamiltonschen Mechanik besagt, dass das Hamiltonsche Vektorfeld divergenzfrei ist, mit der Konsequenz, dass das Phasenraumvolumen von Teilmengen, die mit dem Hamiltonschen Fluss transportiert werden sich nicht verändert. Übertragen Sie den Liouvillschen Satz in eine Bedingung für A.

Aufgabe 3:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen,$f : D \to \mathbb{R}^n$ global Lipschitz differenzierbar, was zur Folge hat, dass es eindeutige globale Lösungen der DGL

$$\dot{x} = f(x)$$

gibt. Sei φ eine Lösung. Man zeige, dass φ entweder injektiv, periodisch oder stationär ist.
Hinweis: Wenn φ injektiv ist, ist nichts zu zeigen, also....

Aufgabe 4: *Behandeln Sie diese Aufgabe nur insoweit, wie die Vorlesung den benötigten Stoff behandelt hat*
Sei

$$\ddot{y} = -\omega^2 y - \gamma\dot{y}$$

mit $\gamma > 0$ und $4\omega^2 \neq \gamma^2$ gegeben.
a) Geben Sie das Vektorfeld an und schreiben Sie es in der Form $v = Ay + b$.
b) Geben Sie den linearen FluÃ

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

an, indem Sie eine Basis finden in der A diagonal ist. Was passiert, wenn $4\omega^2 = \gamma^2$ ist?
c) Geben Sie die Lösung $y(t), t \in \mathbb{R}$ für die Anfangswerte $y(0) = 5$ und $\dot{y}(0) = 0$ an.