Seminar zur Zahlentheorie (WS 2025/26)

Vorkenntnisse: Algebra, Algebraische Zahlentheorie

Vorläufiges Programm / Vorträge

1. Modultheorie über Dedekindringen
Sei $\mathcal{O}$ ein Dedekindring, zum Beispiel $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ der Ring der ganzen Zahlen in einem Zahlkörper K. Ganz ähnlich wie über Hauptidealringen sind endlich-erzeugte torsionsfreie $\mathcal{O}$-Moduln leicht bis auf Isomorphie zu charakterisieren. Über Hauptidealringen ist ein torsionsfreier Modul durch seinen Rang eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt. Über Dedekindringen kommt eine einzige weitere Invariante dazu, die sogenannte Steinitzklasse, die den Modul bis auf Isomorphie festlegt. Die Steinitzklasse ist ein Element der Idealklassengruppe.

   Literatur:

   - Fröhlich/Taylor, Algebraic Number Theory, Ch. II.4
   - Cohen, Advanced topics in computational number theory, Ch.1.1.1 und 1.1.2
   - Cobbe, Steinitz classes of tamely ramified Galois extensions of algebraic number fields, Journal of Number Theory 130 (2010), 1129 - 1154

   Die grundlegenden Resultate in den Lehrbüchern von Fröhlich/Taylor und Cohen sollen im Detail vorgestellt und auch weitestgehend bewiesen werden. In der Arbeit von Cobbe geht es darum, die Fragestellung und die Resultate zu verstehen.

   Je nach Beteiligung ergeben sich aus diesem Themenbereich 3-5 Vorträge.

2. Picard- und Chowgruppen eindimensionaler Noetherscher Ringe
Sei $\mathcal{O}$ ein ein-dimensionaler, noetherscher Integritätsbereich, zum Beispiel eine Teilordnung in einem algebraischen Zahlkörper. Dann ist $\mathcal{O}$ im Allgemeinen kein Dedekindring, da er nicht ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist. Sei $\tilde{\mathcal{O}}$ die Normalisierung von $\mathcal{O}$, d.h. $\tilde{\mathcal{O}}$ ist der ganze Abschluss von $\mathcal{O}$ in seinem Quotientenkörper. Zu $\mathcal{O}$ definiert man nun die Picardgruppe $\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$ und die Chowgruppe $\mathrm{Chow}(\mathcal{O})$. Im Fall $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ stimmen beide Gruppen überein mit der Idealklassengruppe von $\tilde{\mathcal{O}}$, ansonsten gibt es natürliche Abbildungen zwischen diesen Gruppen, die wir genauer studieren wollen.

   Literatur:

   - Neukirch, Algebraische Zahlentheorie, Kap. I.12
   - Kirschmer/Klüners, Chow groups of one-dimensional Noetherian domains, Research in Number Theory 10 (2024)

   Die grundlegenden Resultate im Lehrbuch von Neukirch sollen im Detail vorgestellt und auch weitestgehend bewiesen werden. In der Arbeit von Kirschmer/Klüners geht es darum, die Fragestellung und die Resultate zu verstehen und möglichst viel davon zu beweisen.

   Je nach Beteiligung und Ambition ergeben sich aus diesem Themenbereich 3-5 Vorträge.