

Protokoll zur Vorlesung Kommutative Algebra

W. Bley

1. August 2025

1 Basissatz und Nullstellensatz

1.1 Sehr Grundlegendes

Grundsätzlich sind in dieser Vorlesung alle Ringe kommutativ und unitär, d.h. es gibt ein neutrales Element 1 bezüglich der Multiplikation. Wir erlauben aber den Nullring (Bezeichnung: 0). Hier ist die 1 gleich der 0.

Entsprechend ist ein Ringhomomorphismus $f: R \rightarrow S$ stets ein Homomorphismus von unitären kommutativen Ringen. D.h. neben den üblichen Bedingungen

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a)f(b) \text{ für alle } a, b \in R,$$

verlangen wir auch $f(1_R) = 1_S$.

1.2 Der Hilbertsche Basissatz

Definition 1.2.1 Ein Ring R heißt noethersch, falls jedes Ideal endlich erzeugt ist.

Definition 1.2.2 Ein Ring R genügt der Bedingung für aufsteigende Ketten (von Idealen), wenn jede solche Kette stationär wird, d.h. zu jeder Kette

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \dots$$

von Idealen in R gibt es eine natürliche Zahl i_0 , so dass für alle $i \geq i_0$ die Gleichheit $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_{i_0}$ gilt.

Auch diese Bedingung charakterisiert noethersche Ringe. Es gilt:

Satz 1.2.3 Ein Ring R ist genau dann noethersch, wenn er der Bedingung für aufsteigende Ketten genügt.

Satz 1.2.4 (Hilbertscher Basissatz) Falls der Ring R noethersch ist, so ist auch der Polynomring $R[X]$ noethersch.

Folgerung 1.2.5 a) Sei R noethersch. Dann ist auch der Polynomring $R[X_1, \dots, X_n]$ in den Variablen $X_1, \dots, X_n$ noethersch.

b) Homomorphe Bilder von noetherschen Ringen sind noethersch.

c) Sei R noethersch und A eine endliche erzeugte R -Algebra. Dann ist A noethersch.

Wir wollen kurz noch den Begriff einer R -Algebra erläutern. Seien dazu R und A zwei Ringe und $f: R \rightarrow A$ ein Ringhomomorphismus. Für $r \in R$ und $a \in A$ setzen wir $ra := f(r)a$. Damit wird A zu einem R -Modul. Einen Ring A zusammen mit einem Ringhomomorphismus f nennt man R -Algebra. Falls $R = k$ ein Körper ist (und $A \neq 0$), so ist f automatisch injektiv und wir können oE k als Teilmenge von A betrachten. Eine k -Algebra ist dann ein k -Vektorraum, der zusätzlich ein Ring ist. Jeder Ring B ist eine $\mathbb{Z}$ -Algebra mittels der Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow B, n \mapsto n \cdot 1$.

Seien A_1, A_2 zwei R -Algebren bezüglich der Homomorphismen $f_i: R \rightarrow A_i$, $i = 1, 2$. Ein Ringhomomorphismus $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$ ist ein Homomorphismus von R -Algebren, falls für alle $r \in R$ gilt: $\varphi(f_1(r)) = f_2(r)$. Dies ist äquivalent zur Bedingung:

$$\varphi(ra) = r\varphi(a) \text{ für alle } r \in R, a \in A_1.$$

1.3 Der Hilbertsche Nullstellensatz

Es sei stets k ein Körper.

Für eine Teilmenge $S \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ heißt

$$Z(S) := \{a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ für alle } f \in S\}$$

die affine algebraische Menge zu S . $Z(S)$ ist also die Teilmenge des k^n der gemeinsamen Nullstellen der Polynome in S . Offensichtlich ist $Z(S) = Z((S))$. oE werden wir daher im folgenden davon ausgehen, dass $S = \mathfrak{a}$ ein Ideal in $k[X_1, \dots, X_n]$ ist.

Remarks 1.3.1 (a) Z ist inklusionsumkehrend, d.h. $S_1 \subseteq S_2$ impliziert $Z(S_2) \subseteq Z(S_1)$.

(b) Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ gilt: $Z(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = Z(\mathfrak{a}) \cup Z(\mathfrak{b})$, $Z(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = Z(\mathfrak{a}) \cap Z(\mathfrak{b})$.

Die Menge der affinen algebraischen Teilmengen des k^n bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf dem k^n , der sogenannten Zariski-Topologie (siehe Übungsblatt 1). Wir schreiben oft $k^n = \mathbb{A}^n(k)$ oder auch $\mathbb{A}^n$, falls k als Grundkörper fixiert ist.

Zu $X \subseteq k^n$ definieren wir das Ideal

$$I(X) := \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid f(a) = 0 \text{ für alle } a = (a_1, \dots, a_n) \in X\}.$$

Definition 1.3.2 Sei $X = Z(\mathfrak{a})$ eine algebraische Menge. Dann heißt

$$A(X) := k[X_1, \dots, X_n]/I(X)$$

Koordinatenring oder Ring der regulären Funktionen auf X .

Definition 1.3.3 Ein Ring R heißt reduziert, falls es in R keine nilpotenten Elemente ungleich 0 gibt.

Dieser Begriff steht in engem Zusammenhang zum Begriff des Radikalideals.

Definition 1.3.4 (a) Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann nennt man

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in R \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } f^n \in \mathfrak{a}\}$$

das Radikal von $\mathfrak{a}$.

(b) Falls $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ gilt, so nennt man $\mathfrak{a}$ ein Radikalideal.

Man zeigt leicht, dass $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Ideal ist und es gilt trivialerweise $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Lemma 1.3.5 Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann gilt:

$$\mathfrak{a} \text{ ist ein Radikalideal} \iff R/\mathfrak{a} \text{ ist reduziert.}$$

Insbesondere sind also Primideale radikal.

Da die Verschwindungsideale $I(X)$ stets radikal sind, sind die Koordinatenringe $A(X)$ stets reduziert.

Satz 1.3.6 Sei $X = Z(\mathfrak{a})$ eine affine algebraische Menge. Dann gilt: $Z(I(X)) = X$.

Man kann ebenfalls leicht zeigen, dass für alle Ideale $\mathfrak{a}$ von $k[X_1, \dots, X_n]$ die Inklusion $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq I(Z(\mathfrak{a}))$ gilt. Die andere Inklusion ist für beliebige Körper im Allgemeinen falsch. Es gilt jedoch:

Satz 1.3.7 (Hilbertscher Nullstellensatz) Sei k algebraisch abgeschlossen und $\mathfrak{a} \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal. Dann gilt:

$$I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Damit sind die Zuordnungen $\mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a})$ und $X \mapsto I(X)$ zueinander inverse inklusionsumkehrende Bijektionen zwischen der Menge der Radikaleideale von $k[X_1, \dots, X_n]$ und der Menge der affinen algebraischen Teilmengen des k^n .

Folgerung 1.3.8 Sei k algebraisch abgeschlossen und $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Das System $f_1(X_1, \dots, X_n) = \dots = f_m(X_1, \dots, X_n) = 0$ hat keine Lösung.
- (b) $(f_1, \dots, f_m) = k[X_1, \dots, X_n]$.
- (c) Es gibt $p_1, \dots, p_m \in k[X_1, \dots, X_n]$ mit $1 = \sum_{i=1}^m p_i f_i$.

Folgerung 1.3.9 Sei k algebraisch abgeschlossen und A eine k -Algebra. Dann ist A genau dann der Koordinatenring für eine algebraische Menge, wenn A endlich erzeugt und reduziert ist.

Lemma 1.3.10 Sei k ein Körper und $a_1, \dots, a_n \in k$. Dann ist $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ ein maximales Ideal.

Falls X eine algebraische Menge ist und $p = (a_1, \dots, a_n) \in X$, so gilt

$$I(X) \subseteq I(p) = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n).$$

Folgerung 1.3.11 Sei k algebraisch abgeschlossen und $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge. Dann sind die maximalen Ideale von $A(X)$ genau die Ideale der Form

$$\mathfrak{m}_p := (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)/I(X)$$

mit $p = (a_1, \dots, a_n) \in X$.

Für eine algebraische Menge $X \subseteq k^n$, k algebraisch abgeschlossen, vermittelt also die Abbildung $p \mapsto \mathfrak{m}_p$ eine Bijektion zwischen den Punkten $p \in X$ und den maximalen Idealen des Koordinatenrings $A(X)$.

1.4 Alternative Beschreibung des Radikals eines Ideals

Abschließend in diesem Abschnitt geben wir eine alternative Beschreibung des Radikals eines Ideals $\mathfrak{a}$. Dazu brauchen wir zunächst die folgenden Vorbereitungen. Es sei stets R ein beliebiger kommutativer Ring mit 1.

Definition 1.4.1 Eine Teilmenge $S \subseteq R$ heißt multiplikativ oder multiplikativ abgeschlossen, falls die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind.

- (i) $u, v \in S \implies uv \in S$.
- (ii) $1 \in S$.

Lemma 1.4.2 Sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Menge und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal mit $S \cap \mathfrak{a} = \emptyset$. Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.

Hiermit beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 1.4.3 Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann gilt:

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p},$$

wobei der Schnitt über alle Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ zu erstrecken ist.

2 Lokalisierungen

2.1 Brüche

Definition 2.1.1 Sei R ein kommutativer Ring und M ein R -Modul. Sei $U \subseteq R$ eine multiplikative Menge. Die Lokalisierung von M nach U , in Zeichen $U^{-1}M$ oder $M[U^{-1}]$, ist die Menge der Äquivalenzklassen von Paaren $(m, u) \in M \times U$ bezüglich der Äquivalenzrelation

$$(m, u) \sim (m', u') : \Longleftrightarrow \exists v \in U : v(u'm - um') = 0.$$

Die Äquivalenzklasse von (m, u) bezeichnen wir mit $\frac{m}{u}$. Die Menge $U^{-1}M$ der Äquivalenzklassen wird vermöge

$$\frac{m}{u} + \frac{m'}{u'} := \frac{u'm + um'}{uu'}, \quad r \frac{m}{u} := \frac{rm}{u}$$

zu einem R -Modul.

Im Fall $M = R$ wird die Lokalisierung $U^{-1}R$ durch

$$\frac{r}{u} \cdot \frac{r_1}{u_1} := \frac{rr_1}{uu_1}$$

zu einem kommutativen Ring mit 1.

Die Lokalisierung läßt sich auch bis auf eindeutige Isomorphie durch die folgende universelle Eigenschaft charakterisieren.

Satz 2.1.2 Die Lokalisierung $R[U^{-1}]$ zusammen mit dem Homomorphismus

$$\varphi: R \longrightarrow R[U^{-1}], \quad r \mapsto \frac{r}{1},$$

erfüllt die folgende universelle Eigenschaft: Zu jedem Ringhomomorphismus $\psi: R \longrightarrow S$, so dass $\psi(u) \in S^\times$ für alle $u \in U$ gilt, gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\eta: R[U^{-1}] \longrightarrow S$, so dass $\psi = \eta \circ \varphi$.

Lemma 2.1.3 Sei M ein R -Modul und $U \subseteq R$ eine multiplikative Menge. Sei

$$\varphi: M \longrightarrow U^{-1}M, \quad m \mapsto \frac{m}{1}.$$

a) Es gilt:

$$\varphi(m) = 0 \Longleftrightarrow \exists u \in U \text{ mit } um = 0.$$

b) Sei M endlich erzeugt als R -Modul. Dann gilt:

$$U^{-1}M = 0 \Longleftrightarrow \exists u \in U \text{ mit } uM = 0.$$

Teil (a) impliziert sofort

Folgerung 2.1.4 Sei $U \subseteq R$ multiplikativ. Falls U keine Nullteiler enthält, so ist die Abbildung $\varphi: R \longrightarrow U^{-1}R, r \mapsto \frac{r}{1}$, injektiv.

Die folgenden zwei Beispiele sind besonders wichtig.

Beispiel 1: Falls R nullteilerfrei ist, so ist $U = R \setminus \{0\}$ eine multiplikative Menge. Dann heißt $\text{Quot}(R) := U^{-1}R$ der Quotientenkörper von R . Die kanonische Abbildung

$$\varphi: R \longrightarrow \text{Quot}(R), \quad r \mapsto \frac{r}{1},$$

ist injektiv.

Beispiel 2: Falls $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal ist, so ist $U = R \setminus \mathfrak{p}$ multiplikativ. Falls M ein R -Modul ist, so nennt man $M_{\mathfrak{p}} := U^{-1}M$ die Lokalisierung von M bei $\mathfrak{p}$.

2.2 Ideale in Lokalisierungen

Der folgende Satz gibt einen vollständigen Überblick über den Zusammenhang zwischen den Idealen von R und den Idealen von $U^{-1}R$.

Satz 2.2.1 Sei $U \subseteq R$ multiplikativ und $\varphi: R \longrightarrow U^{-1}R, r \mapsto \frac{r}{1}$.

(a) Sei $I \subseteq U^{-1}R$ ein Ideal in $U^{-1}R$. Dann gilt:

$$\varphi^{-1}(I)U^{-1}R = I.$$

Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \text{Ideale von } R & \xrightarrow{\alpha} & \text{Ideale von } U^{-1}R, \\ J & \mapsto & JU^{-1}R \end{array}$$

ist surjektiv. Ferner ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \text{Ideale von } U^{-1}R & \xrightarrow{\beta} & \text{Ideale von } R, \\ I & \mapsto & \varphi^{-1}(I) \end{array}$$

injektiv.

(b) Sei $J \subseteq R$ ein Ideal in R . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $J = \varphi^{-1}(I)$ für ein Ideal I von $U^{-1}R$.
- (ii) $J = \varphi^{-1}(JU^{-1}R)$.
- (iii) Für alle $r \in R, u \in U$ mit $ru \in J$ gilt $r \in J$

Die Abbildungen α und β sind also zueinander inverse Bijektionen zwischen der Menge der Ideale $J \subseteq R$, die die Bedingung (iii) erfüllen, und der Menge der Ideale $I \subseteq U^{-1}R$.

(c) Die Abbildungen α und β induzieren eine Bijektion zwischen der Menge der Primideale $P \subseteq R$ mit $P \cap U = \emptyset$ und den Primidealen von $U^{-1}R$.

Remark 2.2.2 Von besonderer Bedeutung ist die Lokalisierung nach einem Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$. Die Abbildungen α und β liefern hier eine 1-1-Korrespondenz zwischen den Primidealen $\mathfrak{q}$ von R mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ und den Primidealen der Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$. Insbesondere ist also $R_{\mathfrak{p}}$ ein Ring mit genau einem maximalem Ideal, nämlich $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$.

Definition 2.2.3 Ein lokaler Ring ist ein Ring R mit genau einem maximalen Ideal.

Satz 2.2.4 Sei R ein noetherscher Ring und $U \subseteq R$ multiplikativ. Dann ist auch $R[U^{-1}]$ noethersch.

2.3 Universelle Eigenschaft der Lokalisierung

Die Lokalisierung läßt sich auch bis auf eindeutige Isomorphie durch die folgende universelle Eigenschaft charakterisieren.

Satz 2.3.1 Die Lokalisierung $R[U^{-1}]$ zusammen mit dem Homomorphismus

$$\varphi: R \longrightarrow R[U^{-1}], \quad r \mapsto \frac{r}{1},$$

erfüllt die folgende universelle Eigenschaft: Zu jedem Ringhomomorphismus $\psi: R \longrightarrow S$, so dass $\psi(u) \in S^{\times}$ für alle $u \in U$ gilt, gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\eta: R[U^{-1}] \longrightarrow S$, so dass $\psi = \eta \circ \varphi$.

3 Satz von Cayley-Hamilton und Nakayamas Lemma

3.1 Einschub: R -Moduln

Seien M, N zwei R -Moduln. Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt R -Modulhomomorphismus oder R -linear, falls für alle $x, y \in M$ und alle $r \in R$ gilt:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(rx) = rf(x).$$

Die Menge aller R -Modulhomomorphismen $f: M \rightarrow N$ bezeichnen wir mit $\text{Hom}_R(M, N)$. Für $f, g \in \text{Hom}_R(M, N)$, $r \in R$ und $x \in M$ setzen wir

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (rf)(x) := rf(x).$$

Dadurch wird $\text{Hom}_R(M, N)$ zu einem R -Modul. Man beachte, dass $\text{Hom}_R(R, M) \rightarrow M, f \mapsto f(1)$ ein Isomorphismus von R -Moduln ist.

Für einen R -Teilmodul $M' \subseteq M$ bezeichne M/M' die übliche Faktorgruppe (bez. +). Diese abelsche Gruppe wird durch

$$r(m + M') := rm + M',$$

wobei $r \in R, m \in M$, zu einem R -Modul. Es gelten die bekannten Isomorphiesätze aus der Gruppentheorie an analoger Weise.

Satz 3.1.1 Sei $f: M \rightarrow N$ eine R -Modulhomomorphismus und $M' \subseteq M$ ein Teilmodul mit $M' \subseteq \ker(f)$. Dann induziert f einen R -Modulhomomorphismus $\bar{f}: M/M' \rightarrow N, m + M' \mapsto f(m)$, mit Kern $\ker(\bar{f}) = \ker(f)/M'$.

Als einfache Konsequenz hieraus ergibt sich

Satz 3.1.2 (a) Seien $N \subseteq M \subseteq L$ drei R -Moduln. Dann gilt:

$$\frac{L/N}{M/N} \simeq L/M.$$

(b) Seien M_1, M_2 R -Teilmoduln des R -Moduls M . Dann gilt:

$$(M_1 + M_2)/M_1 \simeq M_2/(M_1 \cap M_2).$$

Hierzu ist die Definition der Summe von Moduln nachzutragen.

Definition 3.1.3 Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmoduln des R -Moduls M . Dann nennt man

$$\sum_{i \in I} M_i := \left\{ \sum_{i \in I} m_i \mid m_i \in M_i \text{ und } m_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I \right\}$$

die Summe der M_i . Dies ist der kleinste Teilmodul von M , der alle M_i enthält.

Definition 3.1.4 Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Moduln.

(a) Die direkte Summe ist definiert durch

$$\bigoplus_{i \in I} M_i := \{(m_i)_{i \in I} \mid m_i \in M_i \text{ und } m_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}.$$

(a) Das direkte Produkt ist definiert durch

$$\prod_{i \in I} M_i := \{(m_i)_{i \in I} \mid m_i \in M_i\}.$$

Sowohl die direkte Summe als auch das direkte Produkt werden durch

$$(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} := (x_i + y_i)_{i \in I}, \quad r(x_i)_{i \in I} := (rx_i)_{i \in I}$$

zu einem R -Modul. Falls I endlich ist, so stimmen direktes Produkt und direkte Summe überein. Seien $M_1, M_2 \subseteq M$ zwei Teilmoduln von M . Dann ist die Abbildung $M_1 \oplus M_2 \rightarrow M, (x, y) \mapsto x + y$, genau dann ein Isomorphismus, wenn

$$M_1 + M_2 = M \text{ und } M_1 \cap M_2 = 0$$

gilt.

Definition 3.1.5 Ein R -Modul heißt frei, falls $M \simeq \bigoplus_{i \in I} R$, wobei I eine beliebige Indexmenge ist. Notation: $R^{(I)} := \bigoplus_{i \in I} R$. Mit $e_j := (x_i)_{i \in I}$, wobei

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j, \\ 1, & \text{falls } i = j. \end{cases}$$

bezeichnen wir die “Standardbasis” von $R^{(I)}$.

Man beachte, dass ein R -Modulhomomorphismus $f: R^{(I)} \rightarrow N$ eindeutig durch die Bilder $f(e_i)$ bestimmt ist. Umgekehrt gibt es zu vorgegebenen Elementen $y_i \in N$ genau einen Modulhomomorphismus $f: R^{(I)} \rightarrow N$ mit $f(e_i) = y_i$ für alle $i \in I$.

Offensichtlich ist ein endlich erzeugter freier R -Modul stets isomorph zu R^n für geeignetes n .

Satz 3.1.6 Ein R -Modul M ist genau dann endlich erzeugt, wenn M isomorph ist zu einem Quotienten von R^n (mit geeignetem $n \in \mathbb{N}$).

3.2 Der Satz von Cayley-Hamilton

Satz 3.2.1 (Cayley-Hamilton) Sei M ein endlich erzeugter R -Modul und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Sei $\phi: M \rightarrow M$ ein R -Modulhomomorphismus mit $\phi(M) \subseteq \mathfrak{a}M$. Dann genügt ϕ einer Gleichung

$$\phi^n + a_{n-1}\phi^{n-1} + \dots + a_1\phi + a_0 = 0$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathfrak{a}$.

Folgerung 3.2.2 Sei M ein endlich erzeugter R -Modul und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal mit $\mathfrak{a}M = M$. Dann gibt es $x \in R$ mit

$$x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}} \text{ und } xM = 0.$$

3.3 Nakayamas Lemma

Definition 3.3.1 Für einen Ring R heißt

$$J(R) := \bigcap_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m},$$

wobei sich der Schnitt über alle maximalen Ideale erstreckt, das Jacobson-Radikal von R .

Das folgende Lemma liefert eine äquivalente Definition des Jacobson-Radikals.

Lemma 3.3.2 Für $x \in R$ gilt:

$$x \in J(R) \iff 1 - xy \in R^\times \text{ für alle } y \in R.$$

Satz 3.3.3 (Nakayamas Lemma) Sei M ein endlich erzeugter R -Modul und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \subseteq J(R)$. Dann gilt:

$$\mathfrak{a}M = M \iff M = 0.$$

Folgerung 3.3.4 Sei M ein endlich erzeugter R -Modul und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \subseteq J(R)$. Sei $N \subseteq M$ ein Teilmodul. Dann gilt:

$$N + \mathfrak{a}M = M \iff M = N.$$

Nakayamas Lemma oder das Korollar werden häufig in folgender Situation angewandt. Sei R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Sei $k := R/\mathfrak{m}$ der Restklassenkörper. Für jeden R -Modul M ist dann $M/\mathfrak{m}M$ ein k -Vektorraum. Offensichtlich gilt für einen lokalen Ring $\mathfrak{m} = J(R)$.

Folgerung 3.3.5 Sei $(R, \mathfrak{m})$ wie eben ein lokaler Ring mit Restklassenkörper k und M ein endlich erzeugter R -Modul. Seien $x_1, \dots, x_n \in M$, so dass die $\bar{x}_i := x_i + \mathfrak{m}M$ den k -Vektorraum $M/\mathfrak{m}M$ erzeugen. Dann gilt:

$$M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_R.$$

Die Umkehrung ist offensichtlich. Man beachte, dass man auf die Voraussetzung der endlichen Erzeugtheit nicht verzichten kann. Die Schlussweise,

$$\dim_k(M/\mathfrak{m}M) < \infty \implies M \text{ ist endlich erzeugt,}$$

ist im Allgemeinen falsch !!!

4 Exakte Sequenzen, Hom-Funktor und Tensorprodukt

4.1 Exakte Sequenzen und Hom

Definition 4.1.1 Eine Sequenz von R -Modulhomomorphismen

$$\dots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \dots$$

heißt exakt bei M_i , falls $\ker(f_{i+1}) = \operatorname{im}(f_i)$ gilt. Die Sequenz heißt exakt, wenn diese Bedingung bei allen M_i gilt.

Satz 4.1.2 (i) Sei

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0 \quad (*)$$

eine Sequenz von R -Moduln. Dann ist $(*)$ genau dann exakt, wenn für alle R -Moduln N die Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\bar{u}} \operatorname{Hom}_R(M', N)$$

exakt ist. Hierbei ist $\bar{v}(f) := f \circ v$ und $\bar{u}(g) := g \circ u$.

(ii) Sei

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \quad (**)$$

eine Sequenz von R -Moduln. Dann ist $(**)$ genau dann exakt, wenn für alle R -Moduln M die Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N') \xrightarrow{\bar{u}} \operatorname{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{Hom}_R(M, N'')$$

exakt ist. Hierbei ist $\bar{u}(f) := u \circ f$ und $\bar{v}(g) := v \circ g$.

Satz 4.1.3 (Schlangenlemma) Sei

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{u'} & N & \xrightarrow{v'} & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von R -Moduln und R -Modulhomomorphismen, so dass die Zeilen exakt sind. Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \ker(f') \xrightarrow{\bar{u}} \ker(f) \xrightarrow{\bar{v}} \ker(f'') \xrightarrow{d} \operatorname{cok}(f') \xrightarrow{\bar{u}'} \operatorname{cok}(f) \xrightarrow{\bar{v}'} \operatorname{cok}(v'') \longrightarrow 0.$$

Oft benötigt man nur die Existenz dieser exakten Kern-Kokern-Sequenz, manchmal jedoch auch die Definition des Morphismus d . Sei dazu $m'' \in \ker(f'')$. Dann gibt es ein $m \in M$ mit $v(m) = m''$. Wegen $f(m) \in \ker(v')$ gibt es ein $n' \in N'$ mit $u'(n') = f(m)$. Wir definieren dann: $d(m'') := n' + \operatorname{im}(f')$.

4.2 Das Tensorprodukt

Definition 4.2.1 Seien M, N und P drei R -Moduln. Eine Abbildung $f: M \times N \longrightarrow P$ heißt bilinear, wenn sie linear in jedem Argument ist.

Satz 4.2.2 Seien M, N zwei R -Moduln. Dann gibt es ein Paar (T, g) bestehend aus einem R -Modul T und einer bilinearen Abbildung $g: M \times N \longrightarrow T$, so dass die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Zu jeder bilinearen Abbildung $f: M \times N \longrightarrow P$, wobei P ein beliebiger R -Modul ist, gibt es genau eine R -lineare Abbildung $f': T \longrightarrow P$, so dass $f' \circ g = f$ gilt. Der Modul T ist durch die universelle Eigenschaft bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt.

Definition 4.2.3 Wir setzen $M \otimes_R N := T$ und nennen $M \otimes_R N$ das Tensorprodukt von M und N . Falls aus dem Kontext klar ist, dass wir über dem Ring R arbeiten, so schreibt man oft einfach $M \otimes N$.

Remark 4.2.4 Für jeden R -Modul P ist die Abbildung

$$\{f: M \times N \longrightarrow P \mid f \text{ bilinear}\} \longrightarrow \{f': M \otimes N \longrightarrow P \mid f' \text{ } R\text{-linear}\}, \quad f \mapsto f',$$

eine Bijektion (mit inverser Abbildung $f' \mapsto f' \circ g$).

Völlig analog definiert man das Tensorprodukt von endlich vielen R -Moduln.

Satz 4.2.5 Seien $M_1, \dots, M_r$ R -Moduln. Dann gibt es ein Paar (T, g) bestehend aus einem R -Modul T und einer multilinearen Abbildung $g: M_1 \times \dots \times M_r \longrightarrow T$, so dass die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Zu jeder multilinearen Abbildung $f: M_1 \times \dots \times M_r \longrightarrow P$, wobei P ein beliebiger R -Modul ist, gibt es genau eine R -lineare Abbildung $f': T \longrightarrow P$, so dass $f' \circ g = f$ gilt. Der Modul T ist durch die universelle Eigenschaft bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt.

Man nennt dann $M_1 \otimes_R \dots \otimes_R M_r := T$ das Tensorprodukt der Moduln $M_1, \dots, M_r$. Das Tensorprodukt hat die folgenden wichtigen Eigenschaften.

Satz 4.2.6 Es seien M, N, P R -Moduln. Dann gilt:

- (a) $M \otimes_R N \simeq N \otimes_R M$ und $M \otimes_R R \simeq M \simeq R \otimes_R M$.
- (b) $(M \otimes_R N) \otimes_R P \simeq M \otimes_R N \otimes_R P \simeq M \otimes_R (N \otimes_R P)$.

- (c) $(M \oplus N) \otimes P \simeq (M \otimes_R P) \oplus (N \otimes_R P)$. Analog hat man auch die Additivität im zweiten Argument.
(d) Das Tensorprodukt ist funktoriell in folgendem Sinne. Falls $f: M \rightarrow N$ ein R -Modulhomomorphismus ist, so ist auch $f: M \otimes_R P \rightarrow N \otimes_R P$, $m \otimes p \mapsto f(m) \otimes p$ ein R -Modulhomomorphismus. Analog haben wir Funktorialität im zweiten Argument.
(e) Das Tensorprodukt ist rechtsexakt in folgendem Sinne. Falls

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

exakt ist, so ist auch

$$Q \otimes_R M \xrightarrow{\bar{f}} Q \otimes_R N \xrightarrow{\bar{g}} Q \otimes_R P \rightarrow 0$$

für jeden R -Modul Q exakt.

(f) Sei A eine R -Algebra, M ein R -Modul und U ein A -Modul. Dann hat man die folgenden Isomorphismen von A -Moduln:

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_A(A \otimes_R M, U) &\simeq \operatorname{Hom}_R(M, U), \quad f \mapsto (m \mapsto f(1 \otimes m)), \\ U \otimes_R M &\simeq U \otimes_A (A \otimes_R M), \quad u \otimes m \mapsto u \otimes (1 \otimes m). \end{aligned}$$

Remark 4.2.7 (a) Sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung und M ein R -Modul. Dann wird $S \otimes_R M$ mittels $s \cdot (s_1 \otimes m) := ss_1 \otimes m$ zu einem S -Modul.

(b) Falls A, B zwei R -Algebren sind, so wird $A \otimes_R B$ mittels $(a \otimes b)(a_1 \otimes b_1) := aa_1 \otimes bb_1$ zu einem Ring.

Lemma 4.2.8 Sei $U \subseteq R$ eine multiplikative Menge und M ein R -Modul. Dann ist

$$U^{-1}R \otimes_R M \xrightarrow{\alpha} U^{-1}M, \quad \frac{r}{u} \otimes m \mapsto \frac{rm}{u},$$

ein Isomorphismus von $U^{-1}R$ -Moduln.

Korrekturen zur Vorlesung: a) In der Vorlesung wurde versucht zu zeigen, dass die Abbildung $g: M \times N \rightarrow C/D$ surjektiv ist. Dies ist nicht gelungen, da die Aussage auch gar nicht richtig ist. Am Anfang der nächsten Vorlesung wird dies klar gestellt, und auch ein korrekter Beweis der Eindeutigkeit der Abbildung f' gegeben.

b) In Satz 4.2.6 (f) sind beide Abbildungen Isomorphismen von A -Moduln. Die A -Modulstruktur von $\operatorname{Hom}_R(M, U)$ ist definiert durch $(af)(m) := af(m)$ für $f \in \operatorname{Hom}_R(M, U)$ und $m \in M$.

4.3 Flachheit

Definition 4.3.1 Ein R -Modul F heißt flach, falls für jede exakte Sequenz $0 \rightarrow A \rightarrow B$ von R -Moduln die Sequenz

$$0 \rightarrow F \otimes_R A \rightarrow F \otimes_R B$$

ebenfalls exakt ist.

Remark 4.3.2 Da $F \otimes_R -$ rechts-exakt ist, ist diese Bedingung äquivalent dazu, dass $F \otimes_R -$ exakt ist. Dabei nennen wir einen Funktor exakt, wenn exakte Sequenzen in exakte Sequenzen übergehen.

Satz 4.3.3 Sei $U \subseteq R$ eine multiplikative Menge. Dann ist $U^{-1}R$ ein flacher R -Modul.

Folgerung 4.3.4 Seien $M_1, \dots, M_r$ Teilmoduln des R -Moduls M und $U \subseteq R$ eine multiplikative Menge. Dann gilt:

$$U^{-1} \left(\bigcap_{j=1}^t M_j \right) = \bigcap_{j=1}^t U^{-1} M_j.$$

Satz 4.3.5 Sei M ein R -Modul. Dann gilt:

- (a) Ein Element $m \in M$ ist genau dann gleich 0, wenn $\frac{m}{1}$ gleich 0 ist in $M_{\mathfrak{m}}$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von R .
- (b) $M = 0 \iff M_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von R .

Folgerung 4.3.6 Sei $\varphi: M \rightarrow N$ ein Homomorphismus von R -Moduln. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) φ ist injektiv (bzw. surjektiv, bzw. bijektiv).
- (ii) $\varphi_{\mathfrak{p}}$ ist injektiv (bzw. surjektiv, bzw. bijektiv) für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R .
- (iii) $\varphi_{\mathfrak{m}}$ ist injektiv (bzw. surjektiv, bzw. bijektiv) für alle Primideale $\mathfrak{m}$ von R .

Satz 4.3.7 Sei M ein R -Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) M ist ein flacher R -Modul.
- (ii) $M_{\mathfrak{p}}$ ist ein flacher $R_{\mathfrak{p}}$ -Modul für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R .
- (iii) $M_{\mathfrak{m}}$ ist ein flacher $R_{\mathfrak{m}}$ -Modul für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von R .

4.4 Noethersche und endlich-präsentierte Moduln

Satz 4.4.1 Für einen R -Modul M sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Jede aufsteigende Kette von Teilmoduln von M wird stationär.
- (ii) Jeder Teilmodul von M ist endlich erzeugt.

Definition 4.4.2 Ein R -Modul heißt noethersch, wenn er eine der beiden äquivalenten Bedingungen des vorigen Satzes erfüllt.

Satz 4.4.3 Sei R -noethersch und M ein R -Modul. Dann gilt:

$$M \text{ ist noethersch} \iff M \text{ ist endlich erzeugt.}$$

Definition 4.4.4 Ein R -Modul heißt endlich präsentiert, wenn es eine exakte Sequenz der Form

$$R^b \rightarrow R^a \rightarrow M \rightarrow 0$$

mit natürlichen Zahlen a, b gibt.

Remark 4.4.5 Jeder endlich präsentierte Modul ist endlich erzeugt. Falls R -noethersch ist, so gilt auch die Umkehrung. Explizit: Für einen noetherschen Ring R sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) M ist noethersch.
- (ii) M ist endlich erzeugt.
- (iii) M ist endlich präsentiert.

Satz 4.4.6 Sei R ein Ring und S eine R -Algebra. Seien M, N zwei R -Moduln. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha: S \otimes_R \text{Hom}_R(M, N) &\rightarrow \text{Hom}_S(S \otimes_R M, S \otimes_R N), \\ s \otimes f &\mapsto (t \otimes m \mapsto st \otimes f(m)) \end{aligned}$$

ein Homomorphismus von S -Moduln.

Falls M endlich präsentiert und S ein flacher R -Modul ist, so ist α ein Isomorphismus.

Folgerung 4.4.7 Sei M endlich präsentiert und $U \subseteq R$ multiplikativ. Dann ist für alle R -Moduln N die Abbildung

$$\begin{aligned} U^{-1} \text{Hom}_R(M, N) &\rightarrow \text{Hom}_{U^{-1}R}(U^{-1}M, U^{-1}N), \\ \frac{f}{u} &\mapsto \left(\frac{m}{u} \mapsto \frac{f(m)}{u} \right) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von $U^{-1}R$ -Moduln.

5 Artinsche Ringe und Kompositonsreihen

5.1 Definitionen

Definition 5.1.1 (a) Ein Ring R heißt artinsch, wenn jede absteigende Folge von Idealen

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$$

stationär wird.

(b) Ein R -Modul M heißt artinsch, wenn jede absteigende Folge von Teilmoduln von M

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \dots$$

stationär wird.

Definition 5.1.2 Ein R -Modul M heißt einfach, falls er außer den trivialen Teilmoduln 0 und M keine weiteren Teilmoduln hat.

Remark 5.1.3 Sei $M \neq 0$ ein einfacher R -Modul und $\mathfrak{a} = \{r \in R \mid rm = 0 \text{ für alle } m \in M\}$ der Annulator von M . Dann ist $\mathfrak{a}$ ein maximales Ideal und es gilt $M \simeq R/\mathfrak{a}$. Etwas genauer: Sei $0 \neq x \in M$ beliebig. Dann ist $M = Rx$ und wir haben eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow R \xrightarrow{\pi_x} M \longrightarrow 0$$

mit $\pi_x(r) := rx$.

Definition 5.1.4 Sei M ein R -Modul. Eine Kette von Teilmoduln ist eine echt absteigende Folge

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_n$$

von Teilmoduln von M (mit echten Inklusionen). Die Zahl n heißt die Länge der Kette. Die Kette ist eine Kompositionsreihe, falls die Faktoren M_i/M_{i+1} für $i = 0, \dots, n-1$ einfach sind und $M_n = 0$ gilt.

5.2 Existenz und Eindeutigkeit von Kompositonsreihen

Satz 5.2.1 Sei M ein R -Modul. Dann gilt:

$$M \text{ hat eine Kompositionsreihe} \iff M \text{ ist artinsch und noethersch.}$$

Falls M eine Kompositionsreihe der Länge n hat, so gilt:

(a) Jede Kette von Teilmoduln von M hat Länge kleiner gleich n und kann zu einer Kompositionsreihe verfeinert werden. Insbesondere haben alle Kompositionsreihen die gleiche Länge.

Wir definieren daher:

$$\text{length}_R(M) = \text{length}(M) := n.$$

Falls M keine Kompositionsreihe hat, so setzt man $\text{length}(M) := \infty$.

(b) Die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha: M &\longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}} M_{\mathfrak{p}}, \\ m &\mapsto \left(\frac{m}{1} \right)_{\mathfrak{p}}, \end{aligned}$$

wobei sich die Summe über alle maximalen Ideale $\mathfrak{p}$ von R erstreckt, so dass $R/\mathfrak{p} \simeq M_i/M_{i+1}$ für ein $i \in \{0, \dots, n-1\}$ gilt. Für jedes solche $\mathfrak{p}$ gilt

$$\#\{i \mid M_i/M_{i+1} \simeq R/\mathfrak{p}\} = \text{length}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}).$$

Insbesondere ist diese Anzahl unabhängig von der Wahl der Kompositionsreihe.

Sprechweise: Man sagt, $\mathfrak{p}$ kommt in M vor, falls es einen Faktor gibt, so dass $R/\mathfrak{p} \simeq M_i/M_{i+1}$.

(c) $\mathfrak{p}$ kommt genau dann in einer (jeder) Kompositionsreihe vor, wenn $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ gilt.

(d) Die Abbildung $M \rightarrow M_{\mathfrak{p}}, m \mapsto \frac{m}{1}$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn es eine natürliche Zahl m gibt, so dass $\mathfrak{p}^m M = 0$ gilt.

Satz 5.2.2 Für einen Ring R sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) R ist noethersch und alle Primideale sind maximal.

(b) R hat als R -Modul endliche Länge, d.h. es gibt eine Kompositionsreihe

$$R = I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_n = (0)$$

von Idealen von R .

(c) R ist artinsch.

Falls eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt ist, so hat R nur endlich viele maximale Ideale. Dies sind genau die maximalen Ideale, die in einer (jeder) Kompositionsteihe von R vorkommen.

Folgendes Korollar wird im Rahmen der Übungen bewiesen.

Folgerung 5.2.3 Sei k ein Körper und $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $|X| < \infty$.

(b) Der Koordinatenring $A(X) = k[X_1, \dots, X_n]/I(X)$ ist ein endlich dimensionaler k -Vektorraum.

(c) $A(X)$ ist artinsch.

Falls eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt ist, so gilt $|X| = \dim_k(A(X))$.

Folgerung 5.2.4 Jeder artinsche Ring ist isomorph zu einem endlichen Produkt von lokalen artinschen Ringen.

Wir schließen diesen Abschnitt mit der geometrischen Interpretation von artinschen Ringen.

Folgerung 5.2.5 Sei k ein Körper und $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $|X| < \infty$.

(b) Der Koordinatenring $A(X) = k[X_1, \dots, X_n]/I(X)$ ist ein endlich dimensionaler k -Vektorraum.

(c) $A(X)$ ist artinsch.

Falls eine dieser äquivalenten Bedingungen erfüllt ist, so gilt $|X| = \dim_k(A(X))$.

6 Die Primäridealzerlegung

6.1 Assoziierte Primideale

Definition 6.1.1 Sei M ein R -Modul. Dann heißt ein Primideal $\mathfrak{p}$ assoziiert zu M , wenn es ein $m \in M$ gibt, so dass $\text{Ann}_R(m) = \mathfrak{p}$ gilt. Die Menge aller zu M assoziierten Primideale bezeichnen wir mit $\text{Ass}_R(M)$.

Satz 6.1.2 Sei R noethersch und $M \neq 0$ ein endlich-erzeugter R -Modul. Dann gilt:

(a)

(i) $|\text{Ass}_R(M)| < \infty$, $\text{Ass}_R(M) \neq \emptyset$.

(ii) $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M) \implies \text{Ann}_R(M) \subseteq \mathfrak{p}$.

(iii) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal, dass minimal bezüglich der Eigenschaft $\text{Ann}_R(M) \subseteq \mathfrak{p}$ ist. Dann ist $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M)$.

(b)

$$\bigcup_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \{r \in R \setminus \{0\} \mid rm = 0 \text{ für ein } m \in M \setminus \{0\}\} \cup \{0\},$$

wobei sich die Vereinigung über alle $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M)$ erstreckt.

(c) Sei $U \subseteq R$ multiplikativ. Dann gilt:

$$\text{Ass}_{U^{-1}R}(U^{-1}M) = \{\mathfrak{p}U^{-1}R \mid \mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M) \text{ mit } \mathfrak{p} \cap U = \emptyset\}.$$

Der Beweis dieses Satzes wird im Verlauf dieses Abschnittes erbracht. Im weiteren sei R ein beliebiger Ring (nicht notwendig noethersch) und M ein beliebiger R -Modul.

Lemma 6.1.3 *Es gilt:*

$$\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M) \iff \text{es gibt einen } R\text{-Modulmonomorphismus } R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M.$$

Definition 6.1.4

a) $\text{Spec}(R) :=$ Menge aller Primideale.

b) $\text{Supp}(M) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$ nennt man den Träger von M .

Proposition 6.1.5 *Es gilt stets $\text{Ass}_R(M) \subseteq \text{Supp}(M)$.*

Lemma 6.1.6 *Sei $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$, $\bar{m} \in R/\mathfrak{p} \setminus \{\bar{0}\}$. Dann gilt:*

(i) $\text{Ann}_R(\bar{m}) = \mathfrak{p}$.

(ii) $\text{Ass}_R(R/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.

Proposition 6.1.7 *Sei $N \subseteq M$ ein R -Teilmodul. Dann gilt:*

$$\text{Ass}_R(N) \subseteq \text{Ass}_R(M) \subseteq \text{Ass}_R(N) \cup \text{Ass}_R(M/N).$$

Folgerung 6.1.8 *Sei $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln. Dann gilt:*

$$\text{Ass}_R(M') \subseteq \text{Ass}_R(M) \subseteq \text{Ass}_R(M') \cup \text{Ass}_R(M'').$$

Folgerung 6.1.9 *Sei $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$ eine endliche direkte Summe von R -Moduln. Dann gilt:*

$$\text{Ass}_R(M) = \bigcup_{i=1}^s \text{Ass}_R(M_i).$$

Proposition 6.1.10 *Sei $\Psi \subseteq \text{Ass}_R(M)$. Dann gibt es einen R -Teilmodul $N \subseteq M$ mit*

$$\text{Ass}_R(M/N) = \Psi \text{ und } \text{Ass}_R(N) = \text{Ass}_R(M) \setminus \Psi.$$

Proposition 6.1.11 *Sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Menge. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ und $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M)$. Dann gilt:*

$$S^{-1}\mathfrak{p} \in \text{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M).$$

Falls $\mathfrak{p}$ endlich erzeugt ist, so gilt auch die Umkehrung.

Folgerung 6.1.12 *Sei R noethersch und M ein R -Modul. Dann gilt:*

$$\text{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{\mathfrak{q} \in \text{Ass}_R(M) \mid \mathfrak{q} \cap S = \emptyset\}.$$

Lemma 6.1.13 *Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, das maximal ist (bez. Inklusion) in der Menge der Annulatoren von Element $0 \neq m \in M$. Dann ist $\mathfrak{a}$ ein Primideal, insbesondere $\mathfrak{a} \in \text{Ass}_R(M)$.*

Folgerung 6.1.14 Sei R noethersch und M ein R -Modul. Dann gilt:

$$M = 0 \iff \text{Ass}_R(M) = \emptyset.$$

Definition 6.1.15 Wir bezeichnen mit $\text{zdiv}(M)$ die Menge der Nullteiler auf M , d.h.

$$\text{zdiv}(M) := \{r \in R \mid \exists 0 \neq m \in M \text{ mit } rm = 0\}.$$

Proposition 6.1.16 Sei R noethersch und M ein R -Modul. Dann gilt:

$$\text{zdiv}(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}.$$

Definition 6.1.17 Für ein Ideal $\mathfrak{a}$ von R definieren wir

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Lemma 6.1.18 Sei R noethersch und M ein R -Modul. Dann gilt:

$$\text{Supp}(M) = \bigcup_{\mathfrak{q} \in \text{Ass}_R(M)} V(\mathfrak{q}) \supseteq \text{Ass}_R(M).$$

Satz 6.1.19 Sei R noethersch und M endlich erzeugt. Sei $\mathfrak{a} := \text{Ann}_R(M)$. Dann gilt:

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}.$$

Satz 6.1.20 Sei R noethersch, M ein R -Modul und $\mathfrak{p} \in \text{Supp}(M)$. Dann gibt es ein $\mathfrak{q} \in \text{Ass}_R(M)$ mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Falls umgekehrt $\mathfrak{p}$ minimal in $\text{Supp}(M)$ ist (äquivalent dazu: minimal über $\text{Ann}_R(M)$), so gilt:

$$\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M).$$

Satz 6.1.21 Sei R noethersch und $M \neq 0$ endlich erzeugt. Dann gibt es eine Kette

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$$

mit $M_{i+1}/M_i \simeq R/\mathfrak{p}_i$ mit Primidealen $\mathfrak{p}_i$. Für jede solche Kette gilt

$$\text{Ass}_R(M) \subseteq \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\} \subseteq \text{Supp}(M).$$

Im Rahmen der Übungen werden wir folgendes Resultat beweisen.

Folgerung 6.1.22 Sei R noethersch und M ein R -Modul.

(a) Sei $m \in M$. Dann gilt:

$$m = 0 \iff m = 0 \text{ in } M_{\mathfrak{p}} \text{ für alle maximalen Elemente in } \text{Ass}_R(M).$$

(b) Sei $N \subseteq M$ ein R -Teilmodul. Dann gilt:

$$N = 0 \iff N_{\mathfrak{p}} = 0 \text{ für alle maximalen Elemente in } \text{Ass}_R(M).$$

(c) Sei $\varphi: M \longrightarrow N$ ein R -Modulhomomorphismus. Dann gilt:

$$\varphi \text{ injektiv} \iff \varphi_{\mathfrak{p}} \text{ injektiv für alle maximalen Elemente in } \text{Ass}_R(M).$$

Man beachte hierbei, dass mit den maximalen Elementen in $\text{Ass}_R(M)$ diejenigen zu M assoziierten Primideale gemeint sind, die maximal bezüglich der Inklusion sind (unter den assoziierten Primidealen). Diese maximalen Elemente sind also im Allgemeinen keine maximalen Ideale.

6.2 Primärzerlegungen

In diesem Abschnitt ist R stets ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R -Modul.

In den Übungen wurde folgendes Resultat gezeigt:

Proposition 6.2.1 Für einen noetherschen Ring R und ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$, $\mathfrak{a} \neq 0$, R sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Für alle $a, b \in R$ gilt: $ab \in \mathfrak{a}, a \notin \mathfrak{a} \implies \exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit $b^n \in \mathfrak{a}$.
- (ii) Jeder Nullteiler in $R/\mathfrak{a}$ ist nilpotent.
- (iii) $|\text{Ass}_R(R/\mathfrak{a})| = 1$.

Falls diese äquivalenten Bedingungen erfüllt sind, nennt man $\mathfrak{a}$ ein Primärideal. Genauer: Falls $\text{Ass}_R(R/\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p}\}$, so nennt man $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{p}$ -primär. Es gilt für $\mathfrak{p}$ -primäre Ideale $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Remark 6.2.2 (a) Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal und $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ für eine natürliche Zahl n . Dann ist $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{m}$ -primär. Insbesondere sind Potenzen von maximalen Idealen primär.

(b) Primideale sind primär. Jedoch sind Potenzen von Primidealen im Allgemeinen nicht primär.

Definition 6.2.3 Sei $N \subseteq M$ ein R -Teilmodul. Dann heißt N $\mathfrak{p}$ -primär, falls $\text{Ass}_R(M/N) = \{\mathfrak{p}\}$.

Lemma 6.2.4 Seien $N_1, \dots, N_r \subseteq M$ $\mathfrak{p}$ -primär. Dann ist auch $N_1 \cap \dots \cap N_r$ $\mathfrak{p}$ -primär.

Der folgende Satz behandelt die Existenz von Primärzerlegungen sowie Eindeutigkeitsaussagen.

Satz 6.2.5 Sei R noethersch und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter R -Modul. Dann ist jeder Teilmodul $M' \subseteq M$, $M' \neq M$ endlicher Durchschnitt von primären Teilmoduln.

Sei also

$$M' = \bigcap_{i=1}^n M_i, \quad \text{Ass}_R(M/M_i) = \{\mathfrak{p}_i\}.$$

eine solche Primärzerlegung. Dann gilt:

- (a) $\text{Ass}_R(M/M') \subseteq \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$.
- (b) Falls der Durchschnitt irredundant ist (d.h. $M' \neq \bigcap_{i=1, i \neq j}^n M_i$ für $j = 1, \dots, n$), so gilt in (a) Gleichheit.
- (c) Es gibt stets einen irredundanten Durchschnitt wie oben, so dass es für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_R(M/M')$ genau einen Index $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$. Wir nennen die Primärzerlegung dann minimal (1. Eindeutigkeitsaussage).
- (d) Sei die Primärzerlegung minimal und $U \subseteq R$ multiplikativ. Seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t \in \text{Ass}_R(M/M')$ diejenigen Primideale mit $\mathfrak{p}_i \cap U = \emptyset$. Dann ist

$$U^{-1}M' = \bigcap_{i=1}^t U^{-1}M_i$$

eine minimale Primärzerlegung von $U^{-1}M'$.

Definition 6.2.6 Sei R noethersch und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter R -Modul. Sei $M' \subseteq M$, $M' \neq M$. Dann nennt man die minimalen Elemente in $\text{Ass}_R(M/M')$ (also diejenigen Primideale $\mathfrak{p}$, die minimal über dem Annulator $\text{Ann}_R(M/M')$ sind) isoliert. Die nicht isolierten Elemente in $\text{Ass}_R(M/M')$ heißen eingebettet.

Satz 6.2.7 Sei R noethersch und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter R -Modul. Sei $M' \subseteq M$, $M' \neq M$ ein Teilmodul und

$$M' = \bigcap_{i=1}^n M_i, \quad \text{Ass}_R(M/M_i) = \{\mathfrak{p}_i\}. \quad (*)$$

eine minimale Primärzerlegung. Sei $\mathfrak{p}_i \in \text{Ass}_R(M/M')$ isoliert. Dann ist

$$M_i/M' = \ker(M/M' \longrightarrow (M/M')_{\mathfrak{p}_i}).$$

Insbesondere ist also M_i unabhängig von der Wahl der Primärzerlegung (*).

Mit anderen Worten: Die Primärkomponenten zu isolierten Primidealen sind durch M, M' eindeutig bestimmt.

Folgerung 6.2.8 Sei R noethersch und M ein endlich erzeugter R -Modul. Sei $M' \subseteq M, M' \neq M$ ein Teilmodul. Falls jedes Primideal $\neq (0)$ maximal ist und $(0) \notin \text{Ass}_R(M/M')$, so ist die Primärzerlegung von M' eindeutig.

Insbesondere läßt sich in einem noetherschen Ring R , in dem jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ maximal ist, jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$, R eindeutig als Schnitt oder Produkt

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i = \prod_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$$

von Primärideal $\mathfrak{q}_i$ darstellen.

6.3 Geometrische Interpretation

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $R = k[x_1, \dots, x_n]$ und $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Radikalideal. Dann ist

$$\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \text{ minimal}} \mathfrak{p} \quad (1)$$

die eindeutige Zerlegung von $\mathfrak{a}$ in Primärideale.

Definition 6.3.1 Eine algebraische Menge X heißt irreduzibel, wenn aus $X = X_1 \cup X_2$ mit algebraischen Mengen $X_1, X_2 \subseteq X, X_1 \neq X \neq X_2$ stets $X = X_1$ oder $X = X_2$ folgt.

Irreduzible algebraische Mengen kann man folgendermaßen charakterisieren.

Satz 6.3.2 Sei k algebraisch abgeschlossen und $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Dann gilt:

$$Z(\mathfrak{a}) \text{ ist irreduzibel} \iff \mathfrak{a} \text{ ist prim.}$$

Aus (1) folgt

$$Z(\mathfrak{a}) = Z(\sqrt{\mathfrak{a}}) = \bigcup_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \text{ minimal}} Z(\mathfrak{p}).$$

Die Zerlegung von $\mathfrak{a}$ in (1) entspricht also genau der eindeutigen Darstellung von $Z(\mathfrak{a})$ als Vereinigung von irreduziblen algebraischen Mengen.

7 Ganze Ringerweiterungen und der Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes

7.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften

Definition 7.1.1 Sei S eine R -Algebra. Dann heißt $s \in S$ ganz über R , falls es ein normiertes Polynom $p \in R[x]$ gibt mit $p(s) = 0$. Wir nennen S eine ganze Ringerweiterung von R (oder kurz: S ist ganz über R), wenn alle $s \in S$ ganz über R sind.

Definition 7.1.2 Sei S eine R -Algebra. Dann heißt

$$\mathcal{O}_{S,R} := \{s \in S \mid s \text{ ist ganz über } R\}$$

der ganze Abschluss von R in S . Falls R ein Integritätsbereich ist, so nennt man R ganz abgeschlossen oder normal, falls R gleich seinem ganzen Abschluss in $S = \text{Quot}(R)$ ist.

Der Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist ganz abgeschlossen; $R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ist dagegen nicht ganz abgeschlossen.

Satz 7.1.3 Sei S eine R -Algebra. Dann ist der ganze Abschluss $\mathcal{O}_{S,R}$ ein Teilring von S . Falls S durch ganze Elemente erzeugt wird (als Algebra), so ist S ganz über R .

Satz 7.1.4 Seien $R \subseteq S \subseteq T$ Ringerweiterungen und sei S ganz über R . Sei $t \in T$ ganz über S . Dann ist t ganz über R .

7.2 Normale Integritätsbereiche und Normalisierung

Satz 7.2.1 Sei R ein faktorieller Ring. Dann ist R normal.

Den folgenden Satz kann man als Verallgemeinerung des Gaußschen Lemmas betrachten.

Satz 7.2.2 Sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung und S ein Integritätsbereich. Sei $f \in R[x]$ normiert und es gelte $f = gh$ mit normierten Polynomen $g, h \in S[x]$. Dann sind die sämtlichen Koeffizienten von g und h ganz über R .

Folgerung 7.2.3 Sei R ein normaler Integritätsbereich und $p \in R[x]$ normiert. Dann gilt:

$$p \text{ ist irreduzibel} \iff p \text{ ist prim.}$$

Remark 7.2.4 Sei $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung und $U \subseteq R$ multiplikativ. Dann ist auch $U^{-1}R \subseteq U^{-1}S$ eine ganze Ringerweiterung.

Der nächste Satz verbessert dieses Resultat und besagt, dass ganzer Abschluss (Normalisierung) und Lokalisierung vertauschen.

Satz 7.2.5 Sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung und $U \subseteq R$ multiplikativ. Dann gilt:

$$U^{-1}\mathcal{O}_{S,R} = \mathcal{O}_{U^{-1}S, U^{-1}R}.$$

7.3 Going-up

Satz 7.3.1 Sei $R \subseteq S$ eine Erweiterung von Integritätsbereichen. Es sei S ganz über R . Dann gilt:

$$S \text{ ist ein Körper} \iff R \text{ ist ein Körper.}$$

Folgerung 7.3.2 Sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung. Es sei S ganz über R . Sei $\mathfrak{q} \subseteq S$ ein Primideal und $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$ das Primideal von R unter $\mathfrak{q}$. Dann gilt:

$$\mathfrak{p} \text{ ist maximal} \iff \mathfrak{q} \text{ ist maximal.}$$

Folgerung 7.3.3 Sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung. Es sei S ganz über R . Seien $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}' \subseteq S$ zwei Primideale über $\mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{q}' \cap R$. Dann gilt $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.

Satz 7.3.4 Sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung. Es sei S ganz über R und $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal in R . Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{q} \subseteq S$ von S über $\mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$.

Satz 7.3.5 (Going-up-Theorem) Sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung. Es sei S ganz über R . Sei

$$\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{p}_n$$

eine Kette von Primidealen von R und

$$\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{q}_m$$

eine Kette von Primidealen in S mit $m < n$ und $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \dots, m$. Dann kann man $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{q}_m$ erweitern zu

$$\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{q}_n$$

mit $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \dots, n$.

7.4 Going-down

Das nächste Theorem besagt, dass ganze Abgeschlossenheit eine lokale Eigenschaft ist.

Satz 7.4.1 Sei R nullteilerfrei. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) R ist ganz abgeschlossen.
- b) $R_{\mathfrak{p}}$ ist ganz abgeschlossen für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R .
- c) $R_{\mathfrak{m}}$ ist ganz abgeschlossen für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von R .

Für den Beweis des Going-down-Theorems benötigen wir eine geringfügige Verallgemeinerung unseres Ganzheitsbegriffes.

Definition 7.4.2 Sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal von R . Ein Element $s \in S$ heißt ganz über $\mathfrak{a}$, falls s Nullstelle eines Polynoms

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \text{ mit } a_i \in \mathfrak{a}$$

ist. Es sei

$$\mathcal{O}_{S,\mathfrak{a}} := \{s \in S \mid s \text{ ist ganz über } \mathfrak{a}\}.$$

der ganze Abschluss von $\mathfrak{a}$ in S .

Lemma 7.4.3 Sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal von R . Dann gilt:

$$\sqrt{\mathfrak{a}\mathcal{O}_{S,R}} = \mathcal{O}_{S,\mathfrak{a}}.$$

Insbesondere ist also $\mathcal{O}_{S,\mathfrak{a}}$ ein Ideal in $\mathcal{O}_{S,R}$.

Als direkte Konsequenz erhalten wir

Remark 7.4.4 Sei R nullteilerfrei und ganz abgeschlossen (in $K := \text{Quot}(R)$). Dann gilt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathcal{O}_{K,\mathfrak{a}}.$$

Satz 7.4.5 Sei $R \subseteq S$ eine Erweiterung von nullteilerfreien Ringen und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal von R . Es sei R ganz abgeschlossen in $K := \text{Quot}(R)$. Sei $s \in S$ ganz über $\mathfrak{a}$. Dann ist offensichtlich s algebraisch über K . Sei

$$f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in K[x]$$

das Minimalpolynom von s . Dann gilt:

$$a_0, \dots, a_{n-1} \in \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Satz 7.4.6 (Going-down) Sei $R \subseteq S$ eine Erweiterung von Integritätsbereichen. Es sei S ganz über R und R ganz abgeschlossen (in $K = \text{Quot}(R)$). Sei

$$\mathfrak{p}_1 \supseteq \mathfrak{p}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{p}_n$$

eine Kette von Primidealen von R und

$$\mathfrak{q}_1 \supseteq \mathfrak{q}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{q}_m$$

eine Kette von Primidealen in S mit $m < n$ und $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \dots, m$. Dann kann man $\mathfrak{q}_1 \supseteq \mathfrak{q}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{q}_m$ erweitern zu

$$\mathfrak{q}_1 \supseteq \mathfrak{q}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{q}_n$$

mit $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Um den Beweis zu vervollständigen, wurde das folgende Lemma gebraucht.

Lemma 7.4.7 Sei $A \subseteq B$ eine Ringerweiterung und $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal. Dann gibt es genau dann ein Primideal $\mathfrak{q}$ von B mit $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$, wenn $\mathfrak{p}B \cap A = \mathfrak{p}$ gilt.

7.5 Bewertungsringe

Definition 7.5.1 Sei R nullteilerfrei und $K = \text{Quot}(R)$. Dann ist R ein Bewertungsring, wenn für alle $0 \neq x \in K$ gilt:

$$x \in R \text{ oder } x^{-1} \in R.$$

Satz 7.5.2 Sei R ein Bewertungsring. Dann gilt:

- a) R ist ein lokaler Ring.
- b) Sei R ein Ring mit $R \subseteq R' \subseteq K$. Dann ist auch R' ein Bewertungsring.
- c) R ist ganz abgeschlossen in K .

Sei nun K ein Körper und Ω ein algebraisch abgeschlossener Körper. Die Menge

$$\Sigma := \{(A, f) \mid A \subseteq K \text{ ist ein Teilring, } f: A \longrightarrow \Omega \text{ ein Ringhomomorphismus}\}$$

ist partiell geordnet bezüglich

$$(A, f) \leq (A', f') : \iff A \subseteq A' \text{ und } f'|_A = f.$$

Wir setzen im Folgenden voraus, dass Σ nicht-leer ist. Dann garantiert das Zornsche Lemma die Existenz maximaler Elemente in Σ . Im Weiteren sei $(B, g) \in \Sigma$ maximal.

Wir notieren zunächst zwei technische Lemmata.

Lemma 7.5.3 B ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \ker(g)$.

Lemma 7.5.4 Sei $0 \neq x \in K$. Dann gilt:

$$\mathfrak{m}[x] \neq B[x] \text{ oder } \mathfrak{m}[x^{-1}] \neq B[x^{-1}].$$

Satz 7.5.5 Sei $(B, g) \in \Sigma$ maximal. Dann ist B ein Bewertungsring.

Folgerung 7.5.6 Sei $R \subseteq K$ ein Teilring, K ein Körper. Sei $\bar{R}$ der ganze Abschluss von R in K . Dann gilt:

$$\bar{R} = \bigcap_{R \subseteq S \subseteq K} S,$$

wobei S die Menge der Bewertungsringe in K durchläuft.

7.6 Der Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes

Satz 7.6.1 Sei $R \subseteq S$ eine Erweiterung von Integritätsbereichen und Ω ein algebraisch abgeschlossener Körper. Es sei S endlich erzeugt über R (als Algebra) und $0 \neq v \in S$. Dann gibt es ein $u \in R \setminus \{0\}$ mit folgender Eigenschaft: jeder Ringhomomorphismus $f: R \rightarrow \Omega$ mit $f(u) \neq 0$ kann zu einem Homomorphismus $g: S \rightarrow \Omega$ mit $g(v) \neq 0$ fortgesetzt werden.

Folgerung 7.6.2 (Schwacher Hilbertscher Nullstellensatz) Sei B eine endlich erzeugte k -Algebra, k ein beliebiger Körper. Dann gilt:

$$B \text{ ist ein Körper} \implies [B : k] < \infty.$$

Hieraus folgern wir den Hilbertschen Nullstellensatz 1.3.7.

8 Dedekindringe und diskrete Bewertungsringe

8.1 Der Dimensionsbegriff

Definition 8.1.1 Eine Kette von Primidealen im Ring R ist eine echt aufsteigende Folge

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n.$$

Man nennt n die Länge der Kette. Die Dimension von R wird definiert als das Supremum über die Längen von allen Ketten von Primidealen.

Der folgende Satz ist im wesentlichen eine Folgerung aus 6.2.8.

Satz 8.1.2 Sei R ein noetherscher Integritätsbereich der Dimension 1. Dann kann man jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ von R eindeutig als Produkt von Primäridealen mit paarweise verschiedenen Radikalen schreiben.

Im weiteren wollen wir noethersche Integritätsbereich der Dimension 1 mit der zusätzlichen Bedingung studieren, dass jedes Primärideal eine Primidealpotenz ist.

8.2 Diskrete Bewertungsringe

Definition 8.2.1 Sei K ein Körper. Eine diskrete Bewertung auf K ist eine surjektive Abbildung

$$v: K^\times \rightarrow \mathbb{Z},$$

so dass für alle $x, y \in K^\times$ gilt:

- 1) $v(xy) = v(x) + v(y)$,
- 2) $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$.

Wir setzen ergänzend: $v(0) = \infty$. Mit den üblichen Rechenregeln für ∞ gelten 1) und 2) weiterhin.

Definition 8.2.2 Sei v eine diskrete Bewertung auf dem Körper K . Dann nennt man

$$R_v := \{\alpha \in K \mid v(\alpha) \geq 0\}$$

den (diskreten) Bewertungsring zu v .

Definition 8.2.3 Ein nullteilerfreier Ring R heißt diskreter Bewertungsring, falls es auf $K := \text{Quot}(R)$ eine diskrete Bewertung v gibt, so dass $R = R_v$ gilt.

In einem diskreten Bewertungsring gilt für alle $a, b \in R$:

$$\begin{aligned} a \in R^\times &\iff v(a) = 0, \\ a \in \mathfrak{m} = R \setminus R^\times &\iff v(a) > 0, \\ v(a) = v(b) &\iff (a) = (b). \end{aligned}$$

Lemma 8.2.4 Jeder diskrete Bewertungsring $R = R_v$ ist noethersch von der Dimension 1. Das maximale Ideal $\mathfrak{m} = \{\alpha \in R \mid v(\alpha) > 0\}$ ist das einzige Primideal $\neq (0)$. Jedes beliebige Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ von R ist eine Potenz von $\mathfrak{m}$. Genauer: sei $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ minimal, so dass ein $y \in \mathfrak{a}$ existiert mit $v(y) = l$, so gilt $\mathfrak{a} = (y)$. Für jedes $x \in R$ mit $v(x) = 1$ gilt:

$$\{(x^l) \mid l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \text{Menge der Ideale } \mathfrak{a} \neq (0) \text{ von } R.$$

Satz 8.2.5 Sei R ein lokaler, noetherscher und nullteilerfreier Ring der Dimension 1. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal und $k := R/\mathfrak{m}$ der Restklassenkörper. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) R ist ein diskreter Bewertungsring.
- ii) R ist ganz abgeschlossen (in $K = \text{Quot}(R)$).
- (iii) $\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal.
- (iv) $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$.
- (v) Jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ ist eine Potenz von $\mathfrak{m}$.
- (vi) Es gibt ein $x \in R, x \neq 0$, so daß

$$\{(x^l) \mid l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \text{Menge der Ideale } \mathfrak{a} \neq (0) \text{ von } R.$$

8.3 Dedekindringe

Satz 8.3.1 Sei R noethersch, nullteilerfrei und von Dimension 1. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) R ist ganz abgeschlossen.
- (ii) Jedes Primärideal ist eine Primideallpotenz.
- (iii) Jeder lokale Ring $R_{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p} \neq (0)$ ist ein diskreter Bewertungsring.

Definition 8.3.2 Ein noetherscher, nullteilerfreier Ring der Dimension 1, der eine der Bedingungen in Satz 8.3.1 erfüllt, heißt Dedekindring.

Folgerung 8.3.3 In einem Dedekindring hat jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ eine eindeutige Darstellung als Produkt (oder Schnitt) von Primideallpotenzen.

Beispiele für Dedekindringe sind Hauptidealringe, die Ringe regulärer Funktionen zu glatten Kurven oder die Ganzheitsringe in algebraischen Zahlkörpern. Hierzu beweisen wir:

Satz 8.3.4 Sei $K/\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper und $\mathcal{O}_K$ der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in K . Dann ist $\mathcal{O}_K$ ein Dedekindring.

Ein entscheidendes Hilfsmittel im Beweis zum letzten Satz ist das folgende Resultat, dessen Beweis auf wichtigen Eigenschaften der Spur beruht.

Satz 8.3.5 Sei A ein Integritätsbereich und ganz abgeschlossen in $K := \text{Quot}(A)$. Sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung vom Grad $[L : K] = n$ und B der ganze Abschluss von A in L . Dann gibt es eine K -Basis $v_1, \dots, v_n$ von L , so dass

$$B \subseteq \sum_{i=1}^n A v_i.$$

9 Kompletterungen

9.1 Topologische Gruppen

Im weiteren sei G stets eine abelsche topologische Gruppe. Wir schreiben die Gruppenaktion additiv. Falls U eine offene Umgebung der 0 ist, so ist $a + U$ eine offene Umgebung von a und umgekehrt. Die Topologie ist also bereits durch die offenen Umgebungen der 0 eindeutig bestimmt.

Lemma 9.1.1 Sei G eine topologische Gruppe. Dann gilt:

- a) Falls $U \leq G$ eine offene Untergruppe ist, so ist U auch abgeschlossen.
- b) Falls $U \leq G$ eine abgeschlossene Untergruppe mit endlichem Index ist, so ist U auch offen.
- c) G ist genau dann hausdorffsch, wenn $\bigcap U = \{0\}$, wobei sich der Schnitt über alle offenen Umgebungen der 0 erstreckt.

Definition 9.1.2 Sei G eine topologische Gruppe und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in G .

- a) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in G$, wenn es für jede offene Umgebung U von a ein $s(U) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq s(U)$ gilt.
- b) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge, wenn es für jede offene Umgebung U von 0 ein $s(U) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n - x_m \in U$ für alle $n, m \geq s(U)$ gilt.

Der übliche Prozess aus der Analysis zur Konstruktion der reellen Zahlen liefert die Vervollständigung $\hat{G}$ von G . Hier eine kurze Skizze:

Sei $\mathcal{C}$ die Menge der Cauchyfolgen auf G und $\mathcal{N}$ die Menge der Nullfolgen. Zwei Cauchyfolgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nennen wir äquivalent, wenn die Differenz $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Dies ist eine Äquivalenzrelation. Es sei $\hat{G} := \mathcal{C}/\mathcal{N}$ die Menge der Äquivalenzklassen. Wir schreiben $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ für die Äquivalenzklasse von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Durch

$$[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] + [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] := [(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}]$$

wird $\hat{G}$ zu einer abelschen Gruppe. Die Abbildung

$$\phi: G \longrightarrow \hat{G}, \quad x \mapsto [(x)_{n \in \mathbb{N}}],$$

ist ein Gruppenhomomorphismus. Es gilt:

$$\phi \text{ ist injektiv} \iff \bigcap_{0 \subseteq U \text{ offen}} U = \{0\} \iff G \text{ ist hausdorffsch.}$$

Die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich des gewöhnlichen Absolutbetrags liefert die reellen Zahlen. Für jede Primzahl p setzen wir für $0 \neq \alpha \in \mathbb{Q}$

$$|\alpha|_p := p^{-v_p(\alpha)}.$$

Dies ist ein Betrag auf $\mathbb{Q}$. Die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_p$ liefert die p -adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$.

9.2 Algebraische Konstruktion der Kompletterung

Ab jetzt setzen wir voraus, dass die $0 \in G$ eine Umgebungsbasis besitzt, die aus offenen Untergruppen besteht. D.h., es gibt eine Folge

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n \supseteq \dots$$

von Untergruppen von G und $U \subseteq G$ ist genau dann offen, wenn es zu jedem Punkt $a \in U$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a + G_n \subseteq U$ gilt.

Unser Standardbeispiel ist $G = \mathbb{Z}$ und $G_n = p^n \mathbb{Z}$ für eine Primzahl p .

Definition 9.2.1 a) Ein projektives System ist eine Familie $(A_n, \alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: A_n ist eine abelsche Gruppe und $\alpha_{n+1}: A_{n+1} \rightarrow A_n$ ein Gruppenhomomorphismus.
b) Sei $(A_n, \alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein projektives System. Dann heißt

$$\varprojlim_n A_n := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} A_n \mid \alpha_{n+1}(a_{n+1}) = a_n \right\}$$

der projektive oder inverse Limes der A_n (bezüglich der α_n).

Satz 9.2.2 Sei G eine topologische Gruppe, wobei die Topologie durch eine Folge

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n \supseteq \dots$$

von Untergruppen gegeben ist. Dann gilt:

$$\hat{G} \simeq \varprojlim_n G/G_n$$

als abelsche Gruppen (und topologische Räume).

Im Beispiel $G = \mathbb{Z}$ und $G_n = p^n \mathbb{Z}$ erhält man mit

$$\mathbb{Z}_p := \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$$

den Ring der ganzen p -adischen Zahlen.

Sei nun

$$0 \longrightarrow (A_n, \alpha_n) \xrightarrow{f} (B_n, \beta_n) \xrightarrow{g} (C_n, \gamma_n) \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von projektiven Systemen. D.h.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & B_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & C_{n+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_{n+1} & & \downarrow \beta_{n+1} & & \downarrow \gamma_{n+1} \\ 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{f_n} & B_n & \xrightarrow{g_n} & C_n \longrightarrow 0 \end{array}$$

ist kommutativ und die Zeilen sind exakt.

Satz 9.2.3 $\varprojlim_n$ ist linksexakt, d.h. wenn

$$0 \longrightarrow (A_n, \alpha_n) \xrightarrow{f} (B_n, \beta_n) \xrightarrow{g} (C_n, \gamma_n) \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von projektiven Systemen ist, so ist

$$0 \longrightarrow \varprojlim_n A_n \longrightarrow \varprojlim_n B_n \longrightarrow \varprojlim_n C_n$$

exakt. Falls $\alpha_{n+1}: A_{n+1} \rightarrow A_n$ surjektiv ist für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$0 \longrightarrow \varprojlim_n A_n \longrightarrow \varprojlim_n B_n \longrightarrow \varprojlim_n C_n \longrightarrow 0$$

exakt.

Folgerung 9.2.4 Sei

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} G'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von topologischen Gruppen. Die Topologie auf G sei definiert durch die Folge der Untergruppen

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n \supseteq \dots$$

und G' bzw. G'' seien mit den induzierten Topologien versehen, d.h. die Topologien werden definiert durch

$$G' = G_0 \cap G' \supseteq G_1 \cap G' \supseteq \dots \supseteq G_n \cap G' \supseteq \dots$$

bzw.

$$G'' = \pi(G_0) \supseteq \pi(G_1) \supseteq \dots \supseteq \pi(G_n) \supseteq \dots$$

Dann ist

$$0 \longrightarrow \widehat{G'} \longrightarrow \widehat{G} \xrightarrow{\pi} \widehat{G''} \longrightarrow 0$$

exakt.

Folgerung 9.2.5 Die Topologie auf G sei definiert durch die Folge der Untergruppen

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n \supseteq \dots$$

Dann ist $\widehat{G_n}$ eine Untergruppe in $\widehat{G}$ und es gilt

$$G/G_n \simeq \widehat{G}/\widehat{G_n}.$$

Satz 9.2.6 Die Topologie auf G sei definiert durch die Folge der Untergruppen

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n \supseteq \dots$$

Dann ist die Topologie auf $\widehat{G}$ definiert durch die Folge der Untergruppen

$$\widehat{G} = \widehat{G_0} \supseteq \widehat{G_1} \supseteq \dots \supseteq \widehat{G_n} \supseteq \dots$$

und es gilt: $\widehat{\widehat{G}} = \widehat{G}$.

Definition 9.2.7 Eine topologische Gruppe G heißt vollständig, falls die kanonische Abbildung $\phi: G \longrightarrow \widehat{G}$ ein Isomorphismus ist.

Definition 9.2.8 (a) Sei A ein Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A . Falls $G = A$ (bezüglich der Addition) und $G_n = \mathfrak{a}^n$, so nennt man die so definierte Topologie die $\mathfrak{a}$ -adische Topologie auf A . Die abelsche Gruppe

$$\widehat{A} := \varprojlim_n A/\mathfrak{a}^n$$

heißt $\mathfrak{a}$ -adische Kompletterung von A .

(b) Sei M ein A -Modul. Dann nennt man

$$\widehat{M} := \varprojlim_n M/\mathfrak{a}^n M$$

die $\mathfrak{a}$ -adische Kompletterung von M .

Remarks 9.2.9 (a) Durch komponentenweise Multiplikation wird $\widehat{A}$ in natürlicher Weise zu einem topologischen Ring, d.h. neben Addition und Inversenbildung (bez. $+$) ist auch die Multiplikation stetig.

(b) $\widehat{A}$ ist hausdorffsch $\iff \bigcap_n \mathfrak{a}^n = (0)$.

(c) Die kanonische Abbildung $\phi: A \longrightarrow \widehat{A}, a \mapsto (a + \mathfrak{a}^n)_n$ ist ein stetiger Ringhomomorphismus mit $\ker(\phi) = \bigcap_n \mathfrak{a}^n$.

(d) $\widehat{M}$ ist in natürlicher Weise ein $\widehat{A}$ -Modul, da für jedes n der Quotient $M/\mathfrak{a}^n M$ ein $A/\mathfrak{a}^n$ -Modul ist. Man definiert für $(a_n)_n \in \widehat{A}$ und $(m_n)_n \in \widehat{M}$

$$(a_n)_n \cdot (m_n)_n := (a_n m_n)_n.$$

9.3 Filtrierungen

Für einen A -Modul M nennen wir eine Kette von Teilmoduln

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_n \supseteq \dots$$

eine Filtrierung von M und schreiben kurz $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definition 9.3.1 Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A und $(M_n)_n$ eine Filtrierung des A -Moduls M . Dann ist $(M_n)_n$ eine $\mathfrak{a}$ -Filtrierung, falls $\mathfrak{a}M_n \subseteq M_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Filtrierung heißt $\mathfrak{a}$ -stabil, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\mathfrak{a}M_n = M_{n+1}$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Man zeigt leicht, dass alle $\mathfrak{a}$ -stabilen Filtrierungen die $\mathfrak{a}$ -adische Topologie auf M erzeugen.

9.4 Graduierte Ringe und Moduln

Definition 9.4.1 (a) Ein graduierter Ring ist ein Ring A , so dass

$$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$$

mit Untergruppe $A_n \leq A$ (bez. $+$) und $A_n A_m \subseteq A_{n+m}$. Elemente in A_n nennt man homogene Elemente vom Grad n .

(b) Sei $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ ein graduierter Ring. Ein graduierter A -Modul ist ein A -Modul M , so dass

$$M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$$

mit Untergruppen $M_n \subseteq M$ und $A_n M_m \subseteq M_{n+m}$.

Das Standardbeispiel ist der Polynomring $R[x_1, \dots, x_n]$ über einem Ring R .

Definition 9.4.2 Seien M und N zwei graduierte A -Moduln, A ein graduierter Ring. Ein A -Modulhomomorphismus $f: M \rightarrow N$ ist ein Homomorphismus von graduierten A -Moduln, falls $f(M_n) \subseteq N_n$ für alle n gilt.

9.5 Das Artin-Rees-Lemma

Sei nun A ein beliebiger Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A . Sei M ein A -Modul und $(M_n)_n$ eine $\mathfrak{a}$ -Filtrierung von M . Dann ist

$$A^* := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n$$

ein graduierter Ring und

$$M^* := \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$$

ein graduierter A -Modul. Falls A noethersch ist, so ist auch A^* noethersch.

Lemma 9.5.1 Sei A ein noetherscher Ring, M ein endlich-erzeugter A -Modul und $(M_n)_n$ eine $\mathfrak{a}$ -Filtrierung. Dann gilt:

$$M^* \text{ ist endlich erzeugt über } A^* \iff (M_n)_n \text{ ist } \mathfrak{a}\text{-stabil.}$$

Satz 9.5.2 (Artin-Rees-Lemma) Sei A ein noetherscher Ring, M ein endlich-erzeugter A -Modul und $(M_n)_n$ eine stabile $\mathfrak{a}$ -Filtrierung. Sei $M' \subseteq M$ ein Teilmodul. Dann ist $(M_n \cap M')_n$ eine stabile $\mathfrak{a}$ -Filtrierung von M' .

Folgerung 9.5.3 Sei A ein noetherscher Ring, M ein endlich-erzeugter A -Modul und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Sei $M' \subseteq M$ ein Teilmodul. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt:

$$\mathfrak{a}^r(\mathfrak{a}^k M \cap M') = \mathfrak{a}^{r+k} M \cap M'.$$

Satz 9.5.4 Sei A ein noetherscher Ring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Sei

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von endlich -erzeugten A -Moduln. Sei $\widehat{}$ die $\mathfrak{a}$ -adische Komplettierung. Dann ist

$$0 \longrightarrow \widehat{M'} \longrightarrow \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\pi}} \widehat{M''} \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von $\widehat{A}$ -Moduln.

Remark 9.5.5 Die Surjektivität von $\widehat{\pi}$ gilt auch ohne die Voraussetzung, dass A noethersch ist.

Wir wollen nun die Frage untersuchen, wann die kanonische Abbildung

$$\eta: \widehat{A} \otimes_A M \longrightarrow \widehat{M}, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \otimes x \mapsto (a_n x)_{n \in \mathbb{N}},$$

ein Isomorphismus von $\widehat{A}$ -Moduln ist.

Satz 9.5.6 a) Falls M ein endlich erzeugter A -Modul ist, so ist η surjektiv.

b) Falls A noethersch und M endlich erzeugt ist, so ist η ein Isomorphismus.

Folgerung 9.5.7 Falls A noethersch und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal in A ist, so ist die $\mathfrak{a}$ -adische Komplettierung $\widehat{A}$ ein flacher A -Modul.

10 Dimensionstheorie lokaler noetherscher Ringe

10.1 Hilbertfunktionen

Satz 10.1.1 Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring, $\mathfrak{q} \subseteq A$ ein $\mathfrak{m}$ -primäres Ideal, M ein endlich erzeugter A -Modul und $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine $\mathfrak{q}$ -stabile Filtrierung. Dann gilt:

(i) $l(M/M_n) < \infty$ für alle $n \geq 0$, wobei hier wie früher $l(N)$ die Länge einer (jeder) Kompositionsreihe für einen A -Modul N bezeichnet.

(ii) Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein Polynom $g \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad $\leq s_{\mathfrak{q}}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$l(M/M_n) = g(n).$$

Hierbei bezeichnet $s_{\mathfrak{q}}$ die minimale Anzahl von Erzeugenden von $\mathfrak{q}$.

(iii) Der Grad $\deg(g)$ und der führende Term $\text{LT}(g)$ hängen nur von M und $\mathfrak{q}$ ab, und nicht von der $\mathfrak{q}$ -stabilen Filtrierung $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Teil (ii) haben wir nicht bewiesen. Es sei dazu auf das Buch von Atiyah/MacDonald, Ch. 11, verwiesen.

Definition 10.1.2 a) Mit den Voraussetzungen von oben und der speziellen Wahl $M_n = \mathfrak{q}^n M$ bezeichnen wir das Polynom $g \in \mathbb{Q}[x]$ in (ii) mit $\chi_{\mathfrak{q}}^M$.

b) $\chi_{\mathfrak{q}} := \chi_{\mathfrak{q}}^A$ heißt charakteristisches Polynom von $\mathfrak{q}$.

Remark 10.1.3 a) Es gilt $\chi_{\mathfrak{q}}^M(n) = l(M/\mathfrak{q}^n M)$ für $n \gg 0$.

b) Es gilt $\chi_{\mathfrak{q}}(n) = l(A/\mathfrak{q}^n)$ für $n \gg 0$. Ferner gilt $\deg(\chi_{\mathfrak{q}}) \leq s_{\mathfrak{q}}$.

Proposition 10.1.4 Es gilt $\deg(\chi_{\mathfrak{q}}) = \deg(\chi_{\mathfrak{m}})$ für alle $\mathfrak{m}$ -primären Ideal $\mathfrak{q}$.

Definition 10.1.5 $d(A) := \deg(\chi_{\mathfrak{m}}) = \deg(\chi_{\mathfrak{q}})$ (für alle $\mathfrak{m}$ -primären Ideal $\mathfrak{q}$).

10.2 Dimensionstheorie lokaler noetherscher Ringe

Definition 10.2.1 Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring. Dann setzt man:

$$\delta(A) := \min\{s_{\mathfrak{q}} \mid \mathfrak{q} \text{ ist } \mathfrak{m}\text{-primär}\}.$$

ZIEL: $\delta(A) = d(A) = \dim(A)$.

Wir zeigen dazu:

$$\delta(A) \geq d(A) \stackrel{(a)}{\geq} \dim(A) \stackrel{(b)}{\geq} \delta(a).$$

Die erste Ungleichung folgt aus Satz 10.1.1 (ii).

Proposition 10.2.2 Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler und noetherscher Ring. Sei M ein e - e A -Modul und $x \in A$ ein Nicht-Nullteiler auf M (d.h. $xm = 0 \iff m = 0$). Sei $M' := M/xM$. Dann gilt für alle $\mathfrak{m}$ -primären Ideale $\mathfrak{q}$:

$$\deg(\chi_{\mathfrak{q}}^{M'}) \leq \deg(\chi_{\mathfrak{q}}^M) - 1.$$

Folgerung 10.2.3 Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler und noetherscher Ring. Dann gilt:

$$d(A/xA) \leq d(A) - 1.$$

Die folgende Proposition zeigt die Ungleichung (a) von oben.

Proposition 10.2.4 Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler und noetherscher Ring. Dann gilt: $d(A) \geq \dim(A)$.

Insbesondere ist also die Dimension eines lokalen noetherschen Rings stets endlich.

Definition 10.2.5 Sei A ein Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A . Dann nennt man

$$\text{ht}(\mathfrak{p}) := \sup\{r \mid \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}\}$$

die Höhe von $\mathfrak{p}$. Alternativ: $\text{ht}(\mathfrak{p}) := \dim(A_{\mathfrak{p}})$.

Die nächste Proposition zeigt die Ungleichung (b) von oben.

Proposition 10.2.6 Sei $(A, \mathfrak{m})$ lokal und noethersch von der Dimension $d := \dim(A)$. Dann gibt es ein $\mathfrak{m}$ -primäres Ideal $\mathfrak{q}$, das von d Elementen erzeugt wird. Insbesondere gilt also $\delta(a) \leq \dim(A)$.

Proposition 10.2.7 Sei $(A, \mathfrak{m})$ lokal und noethersch. Dann gilt:

$$d(A) = \delta(A) = \dim(A).$$