Übungblatt 3 **Probestudium**

1. Entwickle in einen unendlichen Kettenbruch:

   a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{6}$ c) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

2. Welche Zahlen werden durch [1,1,1, ...] und [0,1,1,1, ...] dargestellt? Wie sehen die Näherungsbrüche aus?

3. Welche Zahlen werden durch $[\overline{3,2}]$ und $[1,1,\overline{2}]$ dargestellt?

4. Kettenbrüche dienen auch zur Gewinnung sehr guter approximierender Brüche:
   a) Bestimme mit dem Taschenrechner die ersten 5 Stellen der Kettenbruchentwicklung von π.
   b) Ein guter Näherungsbruch hat einen kleinen Abstand zu π, aber gleichzeitig einen kleinen Nenner. Welche der ersten 5 Näherungsbrüche von π sind besonders „gut“?

5. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\frac{p_k}{q_k}$ der k-te Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von x. Zeige, dass $|x - \frac{p_k}{q_k}| \leq \frac{1}{q_k^2}$. Versuche damit abzuschätzen, den wievielten Näherungsbruch man höchstens braucht, um eine reelle Zahl auf 10^{-4} genau mit einem Bruch anzunähern. Welche Zahl lässt sich besonders schlecht approximieren?

6. Zeige, dass $[n, \overline{2n}] = \sqrt{n^2+1}$.

7. Entwickle $\sqrt{m^2+2m}$ für $m \in \mathbb{N} \setminus 0$ in einen unendlichen Kettenbruch.

8. Hier betrachten wir ein Beispiel, warum die Überlegungen zur Konvergenz von Kettenbrüche wirklich notwendig sind. Wir entwickeln 1 in einen “Kettenbruch”:

$$1 = \frac{3}{4-1} = \cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-1}} = \cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\dots}}}$$

Andererseits ist

$$3 = \frac{3}{4-3} = \cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-3}} = \cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\dots}}}$$

Also

$$1 = \cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\dots}}} = 3$$

Wo liegt der Fehler?