Übungblatt 2 **Probestudium**

1. Schreibe folgende Brüche als einfache Kettenbrüche:

$$\frac{52}{9} \qquad \frac{75}{17} \qquad \frac{1311}{1058}$$

2. Schreibe [3, 7, 15, 1, 292] als Bruch der Form $\frac{a}{b}$, $a,b \in \mathbb{N}$. Bestimme alle Näherungsbrüche und ihren Abstand zum Wert des Kettenbruchs. Kannst du ein Muster feststellen? Welche bekannte Zahl wird angenähert?

3. Sei $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ ein positiver, einfacher Kettenbruch. Bestimme die Darstellung von $\frac{1}{\alpha}$ als einfachen Kettenbruch.

4. Entwickle das Verhältnis zweier, aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen $\frac{F_{i+1}}{F_i}$ in einen Kettenbruch.

5. Sei $[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{P_n}{Q_n}$ ein einfacher Kettenbruch mit Näherungsbrüchen $\frac{P_i}{Q_i}$. Zeige mit den Rekursionsformeln, dass $\frac{P_n}{P_{n-1}} = [a_n, \ldots, a_0]$ und $\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = [a_n, \ldots, a_1]$.

6. Sei $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_1, \ldots, a_n, b$ positive reelle Zahlen. Zeige, dass

$$[a_0, \ldots, a_n + b] < [a_0, \ldots, a_n]$$

   genau dann, wenn n ungerade. Was kann man daraus über die Größe der Näherungsbrüche ableiten?

7. Seien $\frac{p_n}{q_n}$ die Näherungsbrüche eines Kettenbruchs $[a_0, \ldots, a_m]$ mit (n, $m \in \mathbb{N}$ $m \geq n \geq 2$). Zeige, dass

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n$$

8. Auf dem ersten Übungsblatt haben wir uns schon den erweiterten euklidischen Algorithmus als Verfahren angesehen, um für $a, b \in \mathbb{N}$ die Gleichung $xa + yb = \mathrm{ggT}(a, b)$ mit ganzzahligen x, y zu lösen. Hier betrachten wir ein Verfahren, um x, y mit Hilfe von Kettenbrüchen zu bestimmen.
   a) Seien a, b zuerst einmal teilerfremd. Entwickle dann $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch und betrachte Zähler und Nenner des vorletzten Näherungsbruchs. Wieso hast du damit schon fast eine Lösung? Was musst du noch ändern?
   b) Wie kann man bei nicht teilerfremden a, b vorgehen?
   c) Rechne die Beispiele von Blatt 1 durch und vergleiche die Lösungen.