Übungblatt 1 Probestudium 2011

1. Seien $a, b, c, m, n \in \mathbb{Z}$. Zeige mit der Definition aus der Vorlesung:
   a) Wenn $a|b$ und $a|c$, dann auch $a|(mb + nc)$
   b) Wenn $a|b$, dannn $ac|bc$.

2. Bestimme z.B. mit dem euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der folgenden Zahlen:

   a) 98 und 58 b) 1058 und 1311 c) 151 und 34

3. Zeige, dass eine Zahl der Form *abcabc* (also zum Beispiel 123123) durch 7, 11 und 13 teilbar ist.

4. Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(a, b) =: g$.
   a) Zeige, dass $\mathrm{ggT}(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}) = 1$.
   b) Zeige oder widerlege: $\mathrm{ggT}(\frac{a}{g}, b) = 1$
   c) Zeige, dass $\mathrm{ggT}(ac, bc) = c \cdot \mathrm{ggT}(a, b)$.

5. Wir betrachten die sogenannten *Fibonacci-Zahlen* F_i. Diese sind wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_{i+2} &= F_{i+1} + F_i \end{aligned}$$

   Die ersten Fibonacci-Zahlen sind somit $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21, \ldots$

   Beweise, dass F_{n+1} und F_n für $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd sind.

6. Man kann mit dem *euklidischen Algorithmus* zusätzlich zu zwei natürlichen Zahlen a, b noch ganze Zahlen x, y berechen, die $\mathrm{ggT}(a, b) = xa + yb$ erfüllen. Dazu als Beispiel der euklidische Algorithmus mit 17 und 13:

$$\begin{aligned} 17 &= 1 \cdot 13 + 4 \\ 13 &= 3 \cdot 4 + 1 \\ 4 &= 4 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

   Jetzt beginnen wir damit, die Gleichungen von hinten aufzudröseln:

$$\begin{aligned} 1 &= 13 - 3 \cdot 4 \\ &= 13 - 3 \cdot (17 - 1 \cdot 13) \\ &= 4 \cdot 13 - 3 \cdot 17 \end{aligned}$$

   Somit haben wir unsere Vielfachsummendarstellung $\mathrm{ggT}(13, 17) = 1 = 4 \cdot 13 - 3 \cdot 17$ gefunden. Überzeuge dich, dass das Verfahren immer funktioniert und berechne die Vielfachsummendarstellung der Beispiele aus Aufgabe 2.

7. Benutze Aufgabe 6, um zu zeigen, dass $\{xa + yb|\ x, y \in \mathbb{Z}\} = \{z \cdot \mathrm{ggT}(a, b)|\ z \in \mathbb{Z}\}$ für $a, b \in \mathbb{N}$. Das heißt insbesondere, dass $xa + yb = r$ mit $r \in \mathbb{Z}$ genau dann mit ganzzahligen x, y lösbar ist, wenn $\mathrm{ggT}(a, b)|\, r$.

8. Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Zeige, dass aus $a|bc$ auch $a|c$ folgt. Dies ist der Schlüssel zum Beweis der eindeutigen Primfaktorzerlegung. (Tipp: Benutze Aufgabe 7, es gibt $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $1 = xa + xb$)

Für einige numerische Experimente zur Näherung durch Kettenbrüche wäre in den nächsten Tagen ein Taschenrechner nicht schlecht.