Lösungsskizze 3 **Probestudium**

1. Entwickle in einen unendlichen Kettenbruch:

$$\text{a)}\quad \sqrt{5} \qquad\qquad \text{b)}\quad \sqrt{6} \qquad\qquad \text{c)}\quad \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Lösung: Ein allgemeines Verfahren besteht darin, immer wieder den ganzzahligen Anteil zu bestimmen und beim Rest mithilfe der 3. binomischen Formel die Zähler rational zu machen:

$$\sqrt{5}-2 = \frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}+2} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{1}{4+(\sqrt{5}-2)}$$

Somit $\sqrt{5}-2 = [0,\overline{4}]$, also $\sqrt{5} = [2,\overline{4}]$.

$$\sqrt{6}-2 = \frac{2}{\sqrt{6}+2} = \frac{1}{2+\frac{\sqrt{6}-2}{2}} \qquad = \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{6}+2}} = \frac{1}{2+\frac{1}{4+(\sqrt{6}-2)}}$$

Also ist $\sqrt{6}-2 = [0,\overline{2,4}]$ und $\sqrt{6} = [2,\overline{2,4}]$.

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} = 1+\frac{\sqrt{3}-1}{2} = 1+\frac{1}{1+\sqrt{3}} = 1+\frac{1}{2+(\sqrt{3}-2)} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}}$$

Folglich ist $\frac{1+\sqrt{3}}{2} = [\overline{1,2}]$.

2. Welche Zahlen werden durch [1,1,1, ...] und [0,1,1,1, ...] dargestellt? Wie sehen die Näherungsbrüche aus?

Lösung: Durch formales Rechnen erhält man für x=[1,1, ...]:

$$x = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}} = 1+\frac{1}{x}$$

Also $x^2 = x+1$. Nur die Lösung $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist sinnvoll. [1]

[1] Wir haben hier relativ unbefangen mit unendlichen Kettenbrüchen hantiert. Wenn man sauberer argumentiert, sollte man mit den Näherungsbrüchen, ihrer Konvergenz/ Intervallschachtelung und der Stetigkeit von $1+\frac{1}{x}$ arbeiten. Dazu braucht man Begriffe, die man aber erst im Studium genauer betrachtet.

Analog gilt für $y = [0, 1, 1, \dots]$, dass $y = \frac{1}{1+y}$ und man wir erhalten $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ als Lösung der zugehörigen quadratischen Gleichung $y^2 + y = 1$. Natürlich kann man auch $x = y + 1$ benutzen.

Auf dem letzten Übungsblatt haben wir gesehen, dass die Folge der Näherungsbrüche von $[\overline{1}]$ durch $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ gegeben wird. Damit haben wir bewiesen, dass die Verhältnisse der Fibonacci-Zahlen gegen den *goldenen Schnitt* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergieren. Die Näherungsbrüche von $[0, 1, 1, \dots]$ sind andererseits $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ für $n \geq 1$ (siehe Aufgabe zur Kettenbruchentwicklung des Kehrbruchs).

3. Welche Zahlen werden durch $[\overline{3, 2}]$ und $[1, 1, \overline{2}]$ dargestellt?

   Lösung: Sei $x = [\overline{3, 2}]$. Dann ist:

$$x = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}}$$

   Nach Auflösen erhalten wir $2x^2 - 6x - 3 = 0$, also $x = \frac{3+\sqrt{15}}{2}$.

   Wir wissen schon, dass $[1, \overline{2}] = \sqrt{2}$. Wir müssen nur noch einsetzen und zusammenfassen:

$$[1, 1, \overline{2}] = 1 + \frac{1}{[1, \overline{2}]} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. Kettenbrüche dienen auch zur Gewinnung sehr guter approximierender Brüche:

   a) Bestimme mit dem Taschenrechner die ersten 5 Stellen der Kettenbruchentwicklung von π.

   b) Ein guter Näherungsbruch hat einen kleinen Abstand zu π, aber gleichzeitig einen kleinen Nenner. Welche der ersten 5 Näherungsbrüche von π sind besonders „gut"?

   Lösung:

   a) Wir wenden den Kettenbruchalgorithmus numerisch an.

$$\begin{aligned} 3.1415926535 &= 3 + 0.1415926535 \\ \frac{1}{0.1415926535} &= 7 + 0.0625133104 \\ \frac{1}{0.0625133104} &= 15 + 0.9965932631 \\ \frac{1}{0.9965932631} &= 1 + 0.0034183824 \\ \frac{1}{0.0034183824} &= 292 + \dots \end{aligned}$$

   Also haben wir $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, \dots]$ als Anfang der Kettenbruchentwicklung errechnet, was uns vom letzten Übungsblatt bekannt sein sollte.

b) Ein besonders guter Näherungsbruch ist [3,7,15,1], wegen der Kombination aus dem letzten, kleinen Koeffizienten 1 und dem großen, nächsten Koeffizienten 292. Im Vergleich zu [3,7,15] steigt die Genauigkeit noch einmal an, während der Nenner kaum wächst.

a_n	3	7	15	1	292
p_n	3	22	333	355	103993
q_n	1	7	106	113	33102
$\frac{p_n}{q_n}$	3	3,14285714	3,14150943	3.14159292	3.14159265
$\frac{p_n}{q_n} - \pi$	-0.14	$+0.12 \cdot 10^{-2}$	$-0.83 \cdot 10^{-4}$	$+0.27 \cdot 10^{-6}$	$-0.48 \cdot 10^{-9}$

5. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\frac{p_k}{q_k}$ der k-te Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von x. Zeige, dass $|x - \frac{p_k}{q_k}| \leq \frac{1}{q_k^2}$. Versuche damit abzuschätzen, den wievielten Näherungsbruch man höchstens braucht, um eine reelle Zahl auf 10^{-4} genau mit einem Bruch anzunähern. Welche Zahl lässt sich besonders schlecht approximieren?

   Lösung: Wir verwenden die Notation aus der Vorlesung.

$$|x - \frac{p_k}{q_k}| = |[a_0, \ldots, a_k, \frac{1}{e_k}] - [a_0, \ldots, a_k]| = \frac{1}{q_k(q_k\frac{1}{e_k} + q_{k-1})} \leq \frac{1}{q_k^2}$$

   Dabei wurde benutzt, dass $1 \leq \frac{1}{e_k}$. Falls die Entwicklung vorher schon abbricht, ist unsere Gleichung sowieso gültig.

   Wir versuchen jetzt zu zeigen, dass die Nenner mindestens so schnell wie die Fibonacci-Zahlen wachsen. Seien q_n die Nenner der Näherungsbrüche des einfachen Kettenbruchs $[a_0, \ldots, a_n]$. Wir beweisen durch Induktion, dass $q_n \geq F_{n+1}$. Es ist $q_0 = 1 = F_1$ und $q_1 = x_1 \geq 1 = F_2$ (Induktionsanfang). Andererseits ist $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-1} + q_{n-2} \geq F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ (Induktionsschritt). Aber die 12-te Fibonacci-Zahl 144 ist größer 100. Somit hat der 11-te Näherungsbruch eine Genauigkeit von mindestens 10^{-4}.

   Besonders langsam wachsen die Nenner beim goldenen Schnitt $[\overline{1}]$. Bei den meisten Kettenbrüchen sind die Koeffizienten und damit die Nenner viel größer, die Näherungsbrüche somit deutlich bessere Annäherungen.

6. Zeige, dass $[n, \overline{2n}] = \sqrt{n^2+1}$.

   Lösung: Sei $x = [n, \overline{2n}]$. Dann ist $x - n = \frac{1}{2n+(x-n)}$, und daher $(x-n)(x+n) = (x^2 - n^2) = 1$, woraus $x = \sqrt{n^2+1}$ folgt.

7. Entwickle $\sqrt{m^2 + 2m}$ für $m \in \mathbb{N} \setminus 0$ in einen unendlichen Kettenbruch.

Lösung:

$$\sqrt{m^2+2m}-m = \frac{2m}{\sqrt{m^2+2m}+m} = \cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{m^2+2m}-m}{2m}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{m^2+2m}+m}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2m+(\sqrt{m^2+2m}-m)}}$$

Folglich $\sqrt{m^2+2m} = [m, \overline{1, 2m}]$.

8. Hier betrachten wir ein Beispiel, warum die Überlegungen zur Konvergenz von Kettenbrüche wirklich notwendig sind. Wir entwickeln 1 in einen "Kettenbruch":

$$1 = \frac{3}{4-1} = \cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-1}} = \cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\dots}}}$$

Andererseits ist

$$3 = \frac{3}{4-3} = \cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-3}} = \cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\dots}}}$$

Also

$$1 = \cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\dots}}} = 3$$

Wo liegt der Fehler?

Lösung: Man muss sich genau überlegen, was der unendliche Kettenbruch bedeuten soll. Bei einfachen Kettenbrüchen haben wir gezeigt, dass die Näherungsbrüche durch eine Intervallschachtelung eine Zahl festlegen, an die sich der Kettenbruch beliebig genau annähert.

Um den Kettenbruch von beispielsweise $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ zu bestimmen, können wir x mit $x = 1 + \frac{1}{x}$ zu $x = [\,\overline{1}\,]$ entwickeln. Das sieht obigem, falschen Beweis sehr ähnlich, ist aber erlaubt, da der Kettenbruchalgorithmus nach Vorlesung einen Kettenbruch erzeugt, der die Zahl wirklich darstellt.

In unserem „Beweis“ hier wird nicht in einen einfachen Kettenbruch entwickelt. Man kann daher nicht einfach Gleichheit von 1 oder 3 und dem unendlichen „Kettenbruch“ annehmen, wie es die „Entwicklung“ nahelegen würde. Das Verhalten solcher Kettenbrüche, die nicht nur 1 im Nenner zulassen, ist wesentlich komplexer als das der regulären Kettenbrüche.