Lösungsskizze 2 **Probestudium**

1. Schreibe folgende Brüche als einfache Kettenbrüche:

$$\frac{52}{9} \qquad \frac{75}{17} \qquad \frac{1311}{1058}$$

Lösung:

$$\frac{52}{9} = 5 + \frac{7}{9} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{7}} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}$$

$$\frac{75}{17} = 4 + \frac{7}{17} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{7}} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}$$

Am euklidischen Algorithmus von Blatt 1 lesen wir ab:

$$\frac{1311}{1058} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}}$$

2. Schreibe [3, 7, 15, 1, 292] als Bruch der Form $\frac{a}{b}$, $a,b \in \mathbb{N}$. Bestimme alle Näherungsbrüche und ihren Abstand zum Wert des Kettenbruchs. Kannst du ein Muster feststellen? Welche bekannte Zahl wird angenähert?

Lösung:

a_n	3	7	15	1	292
p_n	3	22	333	355	103993
q_n	1	7	106	113	33102
$\frac{p_n}{q_n}$	3	3,14285714	3,14150943	3.14159292	3.14159265
Abweichung	-0.14	$+0.12 \cdot 10^{-2}$	$-0.83 \cdot 10^{-4}$	$+0.27 \cdot 10^{-6}$	0

Die Abweichungen werden immer kleiner, die Näherungsbrüche sind wechselweise größer bzw. kleiner.

Wir haben hier den Kettenbruch von π.

3. Sei $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ ein positiver, einfacher Kettenbruch. Bestimme die Darstellung von $\frac{1}{\alpha}$ als einfachen Kettenbruch.

Lösung: Wir unterscheiden zwei Fälle:

— $a_0 \neq 0$: Dann ist $\frac{1}{\alpha} = [0, a_0, a_1, \ldots, a_n]$.
— $a_0 = 0$: Hier ist $\frac{1}{\alpha} = [a_1, \ldots, a_n]$.

4. Entwickle das Verhältnis zweier, aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen $\frac{F_{i+1}}{F_i}$ in einen Kettenbruch.

   Lösung: Aus dem euklidischen Algorithmus liest man ab:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = [1, \ldots, 1, 2] = [1, \ldots, 1, 1, 1]$$

   mit n Einsen.

5. Sei $[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{P_n}{Q_n}$ ein einfacher Kettenbruch mit Näherungsbrüchen $\frac{P_i}{Q_i}$. Zeige mit den Rekursionsformeln, dass $\frac{P_n}{P_{n-1}} = [a_n, \ldots, a_0]$ und $\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = [a_n, \ldots, a_1]$.

   Lösung: Wir wenden den Euklidischen Algorithmus an:

$$\begin{aligned} p_n &= a_n\, p_{n-1} + p_{n-2} \\ &\ldots \\ p_1 &= a_1\, p_0 + 1 \\ p_0 &= a_0 \cdot 1 \end{aligned}$$

   Wir haben dabei die Rekursiongleichungen angewendet. Da (p_n) streng monoton wächst, haben wir wirklich Divisionen mit Rest durchgeführt. Für die Nenner läuft es genauso, die Iteration bricht nur einen Schritt vorher ab ($q_0 = 1$):

$$\begin{aligned} q_n &= a_n\, q_{n-1} + q_{n-2} \\ &\ldots \\ q_2 &= a_2\, q_1 + 1 \\ q_1 &= a_1 \cdot 1 \end{aligned}$$

   Hieraus liest man die Kettenbruchentwicklungen sofort ab.

6. Sei $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_1, \ldots, a_n, b$ positive reelle Zahlen. Zeige, dass

$$[a_0, \ldots, a_n + b] < [a_0, \ldots, a_n]$$

   genau dann, wenn n ungerade. Was kann man daraus über die Größe der Näherungsbrüche ableiten?

Lösung: Wir zeigen durch Induktion, dass $[a_{n-i}, \ldots, a_n + b] > [a_{n-i}, \ldots, a_n]$ falls i gerade und $[a_{n-i}, \ldots, a_n + b] < [a_{n-i}, \ldots, a_n]$ falls i ungerade. Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang $i = 0$ **:** $[a_n + b] = a_n + b > a_n = [a_n]$, da $b > 0$.

Induktionsschritt $i \to i + 1$**:**

Unsere Lösung beruht darauf, dass $c + \frac{1}{x}$ eine monoton fallende Funktion auf $\mathbb{R}^+$ ist. Fallunterscheidung:

a) i gerade: Dann ist $[a_{n-i}, \ldots, a_n + b] > [a_{n-i}, \ldots, a_n]$, also

$$\begin{aligned}[a_{n-i-1}, \ldots, a_n + b] &= a_{n-i-1} + \frac{1}{[a_{n-i}, \ldots, a_n + b]} \\ &< a_{n-i-1} + \frac{1}{[a_{n-i}, \ldots, a_n]} = [a_{n-i-1}, \ldots, a_n]\end{aligned}$$

b) i ungerade: Dann ist $[a_{n-i}, \ldots, a_n + b] < [a_{n-i}, \ldots, a_n]$, also

$$\begin{aligned}[a_{n-i-1}, \ldots, a_n + b] &= a_{n-i-1} + \frac{1}{[a_{n-i}, \ldots, a_n + b]} \\ &> a_{n-i} + \frac{1}{[a_{n-i}, \ldots, a_n]} = [a_{n-i-1}, \ldots, a_n]\end{aligned}$$

Letzlich ist für $n > k \geq 0$ also

$$[a_0, \ldots, a_n] = [a_0., \ldots, a_k + [a_{k+1}, \ldots, a_n]] < [a_0, \ldots, a_k]$$

genau dann, wenn k ungerade. Man sieht wieder, dass die geraden Näherungsbrüche kleiner und die ungeraden größer als der Wert des Kettenbruchs sind, vergleiche Aufgabe 2.

7. Seien $\frac{p_n}{q_n}$ die Näherungsbrüche eines Kettenbruchs $[a_0, \ldots, a_m]$ mit $(n, m \in \mathbb{N}$ $m \geq n \geq 2)$. Zeige, dass

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} &= \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-2}}{q_{n-1} q_{n-2}} \\ &= (-1)^n \frac{q_n - q_{n-2}}{q_n q_{n-1} q_{n-2}} \\ &= (-1)^n \frac{q_{n-2} + a_n q_{n-1} - q_{n-2}}{q_n q_{n-1} q_{n-2}} \\ &= (-1)^n \frac{a_n}{q_n q_{n-2}}\end{aligned}$$

8. Auf dem ersten Übungsblatt haben wir uns schon den erweiterten euklidischen Algorithmus als Verfahren angesehen, um für $a, b \in \mathbb{N}$ die Gleichung $xa + yb = \mathrm{ggT}(a, b)$ mit ganzzahligen x, y zu lösen. Hier betrachten wir ein Verfahren, um x, y mit Hilfe von Kettenbrüchen zu bestimmen.

   a) Seien a, b zuerst einmal teilerfremd. Entwickle dann $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch und betrachte Zähler und Nenner des vorletzten Näherungsbruchs. Wieso hast du damit schon fast eine Lösung? Was musst du noch ändern?

   b) Wie kann man bei nicht teilerfremden a, b vorgehen?

   c) Rechne die Beispiele von Blatt 1 durch und vergleiche die Lösungen.[1]

   Lösung:

   a) Entwickle $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch und betrachte den vorletzen Näherungsbruch $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Da a und b teilerfremd sind, ist $a = p_n$ und $b = q_n$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = a q_{n-1} - b p_{n-1} = (-1)^{n-1}$. Wähle jetzt $x = (-1)^{n-1} q_{n-1}$ und $y = (-1)^n p_{n-1}$. Diese erfüllen $ax + by = 1$.

   b) Wir kürzen $\frac{a}{b} = \frac{a' \,\mathrm{ggT}(a,b)}{b' \,\mathrm{ggT}(a,b)}$ mit $\mathrm{ggT}(a', b') = 1$. Berechne dann wie oben den vorletzten Näherungsbruch von $\frac{a}{b}$ und finde x, y mit $xa' + yb' = 1$, also $xa + yb = (xa' + yb')\,\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, b)$, d.h. man kann exakt das Gleiche tun.

   c) gleiche Lösungen wie Blatt 1

[1] In der Tat wird die gleiche Lösung nur auf unterschiedlichen Arten berechnet. Einmal berechnet man den vorletzten Näherungsbruch von oben und einmal von unten.