Lösungsskizze 1

1. Seien $a, b, c, m, n \in \mathbb{Z}$. Zeige mit der Definition aus der Vorlesung:
   a) Wenn $a|b$ und $a|c$, dann auch $a|(mb + nc)$
   b) Wenn $a|b$, dannn $ac|bc$.

   Lösung:

   a) Es gibt $b', c' \in \mathbb{N}$ mit $b = b'a, c = c'a$, also ist $mb + nc = (mb' + nc')a$ und damit nach Definition $a|(mb + nc)$.
   b) Es gibt $b' \in \mathbb{N}$ mit $b = b'a$, also $bc = b'(ac)$, also $ac|bc$.

2. Bestimme z.B. mit dem euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der folgenden Zahlen:

   a) 98 und 58 b) 1058 und 1311 c) 151 und 34

   Lösung:

$$\begin{aligned} 98 &= 1 \cdot 58 + 40 \\ 58 &= 1 \cdot 40 + 18 \\ 40 &= 2 \cdot 18 + 4 \\ 18 &= 4 \cdot 4 + 2 \\ 4 &= 2 \cdot 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1311 &= 1 \cdot 1058 + 253 \\ 1058 &= 4 \cdot 253 + 46 \\ 253 &= 5 \cdot 46 + 23 \\ 46 &= 2 \cdot 23 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 151 &= 4 \cdot 34 + 15 \\ 34 &= 2 \cdot 15 + 4 \\ 15 &= 3 \cdot 4 + 3 \\ 4 &= 1 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1 \end{aligned}$$

   Also $\operatorname{ggT}(98, 58) = 2$, $\operatorname{ggT}(1311, 1058) = 23$ und $\operatorname{ggT}(151, 34) = 1$.

3. Zeige, dass eine Zahl der Form *abcabc* (also zum Beispiel 123123) durch 7, 11 und 13 teilbar ist.

   Lösung: Es ist $abcabc = abc \cdot 1001 = abc \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, also durch 7, 11 und 13 teilbar.

4. Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ und $\operatorname{ggT}(a, b) =: g$.
   a) Zeige, dass $\operatorname{ggT}(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}) = 1$.
   b) Zeige oder widerlege: $\operatorname{ggT}(\frac{a}{g}, b) = 1$
   c) Zeige, dass $\operatorname{ggT}(ac, bc) = c \cdot \operatorname{ggT}(a, b)$.

   Lösung:

   a) Da g ein gemeinsamer Teiler von a und b ist, sind $\frac{a}{g}$ und $\frac{b}{g}$ ganz. Sei $t \in \mathbb{N}$ ein gemeinsamer Teiler von $\frac{a}{g}$ und $\frac{b}{g}$. Dann ist tg ein gemeinsamer Teiler von a und b nach Aufgabe 1. Also $tg \leq g = \operatorname{ggT}(a, b)$, weswegen $t \leq 1$. Also sind $\frac{a}{g}$ und $\frac{b}{g}$ teilerfremd.
   b) Die Aussage ist falsch, z.B. $\operatorname{ggT}(4, 2) = 2$ und $\operatorname{ggT}(\frac{4}{2}, 2) = 2$.
   c) Aus Aufgabe 1 b) folgt, dass cg ein gemeinsamer Teiler von ac und bc ist.

      Jetzt müssen wir noch zeigen, dass gc der größte gemeinsame Teiler ist. Sei $t = \operatorname{ggT}(ac, bc)$. Dann $gc|t$, also $g|\frac{t}{c}$ und $\frac{t}{c}$ ganz. Also, da g der ggT und $\frac{t}{c}$ gemeinsamer Teiler von a, b ist $g = \frac{t}{c}$, damit $gc = t$. Hier haben wir benutzt, dass jeder gemeinsame Teiler den ggT teilt.

      Einen anderen Beweis bekommt bekommen wir durch den euklidischen Algorithmus mit ac und bc. Dabei ist jeder Schritt das c-fache des entsprechenden Schritts beim Algorithmus mit a und b, also erhält man $c \cdot \operatorname{ggT}(a, b)$.

5. Wir betrachten die sogenannten *Fibonacci-Zahlen* F_i. Diese sind wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_{i+2} &= F_{i+1} + F_i \end{aligned}$$

Die ersten Fibonacci-Zahlen sind somit $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \dots$

Beweise, dass F_{n+1} und F_n für $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd sind.

Lösung: Wir wenden den euklidischen Algorithmus auf F_{n+1} und F_n an und sehen, dass wir schrittweise immer niedrigere Fibonacci-Zahlen erhalten:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \\ &\dots \\ 3 &= 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

Da der euklidischen Algorithmus mit 1 abbricht, sind F_{n+1} und F_n teilerfremd.

6. Man kann mit dem *euklidischen Algorithmus* zusätzlich zu zwei natürlichen Zahlen a, b noch ganze Zahlen x, y berechen, die $\mathrm{ggT}(a, b) = xa + yb$ erfüllen. Dazu als Beispiel der euklidische Algorithmus mit 17 und 13:

$$\begin{aligned} 17 &= 1 \cdot 13 + 4 \\ 13 &= 3 \cdot 4 + 1 \\ 4 &= 4 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Jetzt beginnen wir damit, die Gleichungen von hinten aufzudröseln:

$$\begin{aligned} 1 &= 13 - 3 \cdot 4 \\ &= 13 - 3 \cdot (17 - 1 \cdot 13) \\ &= 4 \cdot 13 - 3 \cdot 17 \end{aligned}$$

Somit haben wir unsere Vielfachsummendarstellung $\mathrm{ggT}(13, 17) = 1 = 4 \cdot 13 - 3 \cdot 17$ gefunden. Überzeuge dich, dass das Verfahren immer funktioniert und berechne die Vielfachsummendarstellung der Beispiele aus Aufgabe 2.

Lösung:

$$\begin{aligned} 2 &= 22 \cdot 58 - 13 \cdot 98 \\ 23 &= 21 \cdot 1311 - 26 \cdot 1058 \\ 1 &= 40 \cdot 34 - 9 \cdot 151 \end{aligned}$$

7. Benutze Aufgabe 6, um zu zeigen, dass $\{xa+yb|\ x,y\in\mathbb{Z}\}=\{z\cdot\mathrm{ggT}(a,b)|\ z\in\mathbb{Z}\}$ für $a,b\in\mathbb{N}$. Das heißt insbesondere, dass $xa+yb=r$ mit $r\in\mathbb{Z}$ genau dann mit ganzzahligen x,y lösbar ist, wenn $\mathrm{ggT}(a,b)|\,r$.

   Lösung: Aus Aufgabe 6 wissen, wir, dass es $x,y\in\mathbb{Z}$ gibt, sodass $xa+yb=\mathrm{ggT}(a,b)$. Für ein beliebiges $z\in\mathbb{Z}$ ist also $(zx)a+(zy)b=z\cdot\mathrm{ggT}(a,b)$ und somit $\{xa+yb|\ x,y\in\mathbb{Z}\}\supset\{z\,\mathrm{ggT}(a,b)|\ z\in\mathbb{Z}\}$.

   Sind andererseits $x,y\in\mathbb{Z}$ gegeben, dann teilt $\mathrm{ggT}(a,b)$ als gemeinsamer Teiler von a und b nach Aufgabe 1 auch $xa+yb$, also gibt es ein $z\in\mathbb{Z}$ mit $z\cdot ggT(a,b)=xa+yb$. Somit $\{xa+yb|\ x,y\in\mathbb{Z}\}\subset\{z\,\mathrm{ggT}(a,b)|\ z\in\mathbb{Z}\}$ und insgesamt gilt Gleichheit.

8. Seien $a,b,c\in\mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(a,b)=1$. Zeige, dass aus $a|bc$ auch $a|c$ folgt. Dies ist der Schlüssel zum Beweis der eindeutigen Primfaktorzerlegung. (Tipp: Benutze Aufgabe 7, es gibt $x,y\in\mathbb{Z}$ mit $1=xa+xb$)

   Lösung: Man erhält $c=xac+ybc$. Da a sowohl xac als auch ybc teilt, muss es auch die linke Seite, also c teilen.

Für einige numerische Experimente zur Näherung durch Kettenbrüche wäre in den nächsten Tagen ein Taschenrechner nicht schlecht.