

Eine Einführung in die Graphentheorie

1 Anwendungsbeispiele

Folgende Fragestellungen haben auf den ersten Blick nur wenig miteinander zu tun:

- “Nikolaus”: Kann man das “Haus vom Nikolaus” zeichnen, ohne den Stift abzusetzen? Wie ist es bei anderen Figuren?
- “Heiratsvermittlung”: Manche Paare von Männern und Frauen sind kompatibel, andere nicht. Wann kann man aus gegebenen Männern und Frauen lauter kompatible Paare bilden?
- “Navi”: Wie findet ein Navigationssystem die kürzeste Verbindung zwischen zwei Adressen?
- “Einkaufstour”: Eine Tour soll den Besuch mehrerer Geschäfte verbinden. Bei welcher Reihenfolge ergibt sich die kürzeste Tour?
- “Landkarte”: Die Bundesländer einer Deutschlandkarte sollen verschiedenfarbig dargestellt werden (benachbarte Länder in unterschiedlichen Farben). Wie viele Farben benötigt man?
- “Party”: Es sollen alle Freunde zu Partys eingeladen werden. Manche der Freunde können sich gegenseitig nicht leiden. Wie viele Partys müssen abgehalten werden, so dass jeder eingeladen werden kann, und auf jeder Party sich alle leiden können?

Was haben diese Probleme miteinander zu tun?

Sie können durch das gleiche mathematische Modell beschrieben werden: Graphen.

2 Grundlegende Definitionen

2.1 Graphen

Definition: Ein Graph G wird beschrieben durch $G = (E, K)$. Hierbei ist

- E eine (endliche) Menge von Ecken
- K eine Menge von Kanten zwischen den Ecken

Ecken werden meist mit Buchstaben bezeichnet. Die Kante zwischen den Ecken a und b wird mit ab (oder ba) bezeichnet.

Ein Graph kann durch ein Bild veranschaulicht werden. Hierbei werden Ecken als Punkte und Kanten als Verbindungslinien zwischen Punkten gezeichnet.

Beispiel: $G = (E, K)$ mit $E = \{a, b, c, d, e\}$, $K = \{ab, ac, ad, bc, bd, cd, ce, de\}$



Man beachte, dass der gleiche Graph auf unterschiedliche Arten gezeichnet werden kann. Wichtig ist nur, dass die Kanten zwischen den richtigen Ecken gezeichnet werden:

Beispiel:



Generell kann man Graphen in Situationen verwenden, wo Objekte betrachtet werden ("Ecken"), zwischen manchen von denen Beziehungen bestehen ("Kanten"). Für die anderen Probleme aus Kapitel 1 haben wir beispielsweise:

Beispiel	Ecken	Kanten zwischen:
"Heiratsvermittlung"	Personen	kompatiblen Personen
"Navi"	Adressen	Adressen mit direkter Straßenverbindung
"Einkaufstour"	Geschäfte	je 2 Geschäften
"Landkarte"	Länder	angrenzenden Ländern
"Party"	Personen	Personen, die sich nicht leiden können

Um Graphen zu beschreiben, sind folgende Merkmale und Konzepte hilfreich:

Definition: Sei $G = (E, K)$ ein Graph.

- $\deg(x)$, der Grad von x , ist die Anzahl der Kanten, die von der Ecke $x \in E$ ausgehen.
- Ein k -Eck (mit $k \in \{3, 4, \dots\}$) ist eine Folge von verschiedenen Ecken, die in der gegebenen Reihenfolge durch Kanten verbunden sind: $x_1, x_2, \dots, x_k \in E$ mit $x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k, x_kx_1 \in K$.
- G heißt zusammenhängend, wenn man von jeder Ecke aus jede andere Ecke erreichen kann, indem man über Kanten geht.
- Eine Komponente von G ist eine maximale zusammenhängende Teilmenge von Ecken.
- Der komplementäre Graph $\bar{G} = (\bar{E}, \bar{K})$ hat die gleichen Ecken, $\bar{E} = E$, aber genau die Kanten, die nicht in K sind.

Beispiel: Beschreiben Sie G , und zeichnen und beschreiben sie $\bar{G}$:

$\subset$

Der Graph G hat 6 Ecken und 9 Kanten. Alle Ecken haben den Grad 3. Der Graph ist zusammenhängend. Es gibt kein 3-Eck, aber mehrere 4-Ecke und 6-Ecke.

Der komplementäre Graph hat 6 Ecken und 6 Kanten. Jede Ecke hat den Grad 2. Der Graph hat zwei Komponenten. Jede Komponente ist ein 3-Eck.

Beispiel: Beschreiben Sie G , und zeichnen und beschreiben sie $\bar{G}$:

λ

Der Graph hat 5 Ecken und 4 Kanten. Die Grade sind 0,1,2,2,3. G besteht aus zwei Komponenten (eine davon besteht nur aus einer Ecke). G hat genau ein 3-Eck, und keine anderen Vielecke.

Der komplementäre Graph ist zusammenhängend. Die Grade sind 1,2,2,3,4. Er enthält 2 3-Ecke und 1 4-Eck.

2.2 Isomorphie

Meistens ist es nicht wichtig, wie die Ecken bezeichnet werden.

Definition: Zwei Graphen $G = (E, K)$ und $G' = (E', K')$ heißen isomorph ($G \cong G'$), falls sie gleich sind bis auf mögliche Umbenennung der Ecken, d.h. falls es eine bijektive (Umbenennungs-)Abbildung $\varphi : E \rightarrow E'$ gibt, so dass die Kanten einander entsprechen: $xy \in K$ genau dann, wenn $\varphi(x)\varphi(y) \in K'$. φ heißt dann ein Isomorphismus.

Beispiel: Ist $G \cong G'$?

e

Die Graphen sind isomorph. Ein Isomorphismus wird gegeben durch

$$d \mapsto \varphi(d) = D, c \mapsto \varphi(c) = A, b \mapsto \varphi(b) = B, a \mapsto \varphi(a) = C$$

Auch die Kanten entsprechen einander:

$$cd \mapsto \varphi(c)\varphi(d) = AD, cb \mapsto \varphi(c)\varphi(b) = AB, ca \mapsto \varphi(c)\varphi(a) = AC, ab \mapsto \varphi(a)\varphi(b) = BC$$

Wenn zwei Graphen unterschiedlich gezeichnet sind, kann es schwierig sein, zu entscheiden, ob sie isomorph sind. Isomorphie sieht man aber sofort, wenn man die Graphen auf die gleiche Weise zeichnen kann, etwa in obigem Beispiel:

f

Bemerkung: Um zu zeigen, dass zwei Graphen nicht isomorph sind, genügt es eine Eigenschaft zu finden (die nicht von Eckenbezeichnungen abhängt), bezüglich der sie sich unterscheiden.

Beispiel: Ist $G \cong G''$?

g

G hat 6 Ecken, 9 Kanten, G' hat 6 Ecken, 8 Kanten. Sie sind also nicht isomorph.

Beispiel: Ist $G \cong G'$?

h

G hat 9 Ecken mit Graden 2 (4x), 3 (4x), 4 (1x), 12 Kanten, G' ebenso. Versuche G' wie G zu zeichnen, beginnend mit C in der Mitte, dann F , dann A und B , u.s.w., siehe oben. Aus der Zeichnung ergibt sich sofort, dass die Graphen isomorph sind.

Beispiel: Ist $G \cong G'$?

;

G hat 7 Ecken (vom Grad 4), 14 Kanten, 7 3-Ecke, ... G' ebenso. Wir vermuten, dass G und G' isomorph sind, aber es liegt nicht auf der Hand, was der Isomorphismus φ sein soll. Wir setzen $a \mapsto A$ (ist egal wegen der Symmetrie). b ist mit a über eine Kante verbunden, daher muss $b \mapsto B, D, E$ oder G sein. Wir versuchen $b \mapsto B$. c ist mit a und b durch eine Kante verbunden, daher muss $c \mapsto E$ sein. Auch g ist mit a und b durch eine Kante verbunden, aber in G' gibt es keine weitere Ecke, die mit A und B verbunden ist, daher kommen wir so nicht weiter, und müssen die anderen Möglichkeiten $b \mapsto D, E, G$ durchprobieren.

Wir verfolgen dies nicht weiter, sondern betrachten die komplementären Graphen $\bar{G}$ und $\bar{G}'$, da diese weniger Kanten haben, und daher leichter zu analysieren sind:

j

Sowohl $\bar{G}$ und $\bar{G}'$ sind einfache 7-Ecke und daher isomorph. Ein Isomorphismus bildet beispielsweise a, d, g, c, f, b, e in dieser Reihenfolge auf A, C, E, G, B, D, F ab. Dies muss dann auch ein Isomorphismus für die ursprünglichen Graphen sein. Somit ist $G \cong G'$.

Beispiel: Ist $G \cong G'$?

$\mathbb{R}$

G hat 8 Ecken mit Graden 2 (4x) und 3 (4x), 10 Kanten, G' ebenso. Aber G hat 2 4-Ecke, und G' hat 3 4-Ecke. Sie sind also nicht isomorph.

Beispiel: Finde alle Graphen (bis auf Isomorphie) mit 4 Ecken:

0 Kanten:

1 Kante:

2 Kanten:

3 Kanten:

$\mathbb{R}$

4 Kanten:

5 Kanten:

6 Kanten:

Offenbar sind die angegebenen Graphen nicht untereinander isomorph, und wir sollten begründen, dass dies wirklich alle Graphen sind: Dies ist klar für 0 und 1 Kante. Bei 2 Kanten kann der Graph entweder aus 1 oder 2 Komponenten bestehen. In beiden Fällen gibt es nur eine Möglichkeit. Bei 3 Kanten kann es nur 1 oder 2 Komponenten geben. Bei 2 Komponenten muss eine Komponente aus einer einzelnen Ecke bestehen, und die anderen drei Ecken formen dann ein 3-Eck. Bei 1 Komponente hängen 2 Kanten zusammen und die dritte Kante kann entweder an einem Ende oder in der Mitte angefügt werden. Die Graphen mit 4,5,6 Kanten sind gerade die komplementären Graphen von denen mit 2,1,0 Kanten. Insgesamt gibt es also 11 Möglichkeiten.

3 Wege und Rundwege

Problem "Nikolaus". Welche Graphen kann man in einem Zug zeichnen?

Definition: Sei $G = (E, K)$ ein Graph.

- Ein Weg ist eine Folge von Ecken, die in dieser Reihenfolge durch Kanten verbunden sind: $x_1, \dots, x_k \in E$ mit $x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k \in K$.
- Ein Rundweg ist ein Weg bei dem auch die letzte mit der ersten Ecke durch eine Kante verbunden ist: $x_1, \dots, x_k \in E$ mit $x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k, x_kx_1 \in K$.

Die Ecken eines Weges brauchen (anders als beim n -Eck) nicht verschieden zu sein!

3.1 Eulersche Wege

Definition: Ein Weg/Rundweg heißt Euler-Weg/Rundweg, wenn er jede Kante genau einmal durchläuft.

Beispiel: "Haus vom Nikolaus"



a, b, e, c, a, c, a, b ist ein Weg. a, b, d, e, a ist kein Weg, da bd keine Kante ist. a, b, c, e, a ist ein Rundweg (und ein 4-Eck). $a, b, c, e, d, c, a, e, b$ ist ein Euler-Weg. Gibt es einen Euler-Rundweg???

Beispiel: "Haus vom Nikolaus mit Keller"



Lemma 1: Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $x \in E$. Die Anzahl der Kanten eines Rundwegs, die x enthalten, ist gerade.

Beweis: Wir durchlaufen den Rundweg $x_1, \dots, x_k, x_1$ in der vorgegebenen Richtung. Jedesmal wenn der Weg nach x führt, führt er im nächsten Schritt wieder weg, d.h. die Kanten, die x enthalten, treten in hin-weg-Paaren auf. Die Anzahl solcher Kanten ist also gerade.

Lemma 2: Ist $G = (E, K)$ ein Graph, in dem jede Ecke geraden Grad hat, so gibt es einen Rundweg mit lauter verschiedenen Kanten.

Beweis:

Wir starten in x_1 und gehen entlang Kanten $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \dots$ (keine Kante zweimal) bis wir entweder nach x_1 zurückkommen oder bis wir an eine Ecke x_k kommen, wo wir stecken bleiben, weil alle Kanten von x_k aus schon begangen wurden. Wir müssen nur zeigen, dass der zweite Fall nicht vorkommen kann: Ist $x_k \neq x_1$, so ist unter den bisher begangenen Kanten eine ungerade Anzahl von solchen, die von x_k ausgehen: ein paar hin-weg-Paare und die letzte Kante $x_{k-1}x_k$. Da von x_k insgesamt eine gerade Anzahl von Kanten ausgeht, gibt es also eine, die noch nicht begangen wurde, und wir können den Weg fortsetzen.



Satz: Sei G ein zusammenhängender Graph.

1. G hat genau dann einen Euler-Rundweg, wenn keine Ecke ungeraden Grad hat.
2. G hat genau dann einen Euler-Weg, wenn keine oder 2 Ecken ungeraden Grad haben.

Beweis:

1. " $\Rightarrow$ ": Sei W ein Euler-Rundweg, und x eine beliebige Ecke. Die Anzahl der Kanten von W , die x enthalten, ist gleich dem Grad von x , und daher hat x geraden Grad nach Lemma 1.

" $\Leftarrow$ ": Es habe jede Ecke geraden Grad. Wir wählen mit Hilfe von Lemma 2 einen Rundweg mit lauter verschiedenen Kanten und löschen diese aus dem Graphen. Im neu entstandenen Graphen hat nach Lemma 1 wieder jede Ecke geraden Grad. Wir können diese Prozedur also so lange wiederholen, bis alle Kanten aufgebraucht sind. Wir haben somit den Graph in Rundwege mit lauter verschiedenen Kanten zerlegt, und müssen diese Rundwege nur noch zu einem einzigen Rundweg zusammenfügen. Da der Graph zusammenhängend ist, gibt es zu jedem Rundweg einen weiteren Rundweg, so dass die beiden eine gemeinsame Ecke x haben. Die beiden Rundwege sind dann von der Form $x, \dots, x$ und $x, \dots, x$ und können zu einem einzigen Rundweg $x, \dots, x, \dots, x$ zusammengefügt werden. Nach und nach erhalten wir so aus den ganzen Rundwegen einen einzigen Rundweg.

2. " $\Rightarrow$ ": Sei $x_1, \dots, x_k$ ein Euler-Weg. Falls $x_1 = x_k$ ist dies sogar ein Rundweg und daher haben alle Ecken geraden Grad nach 1. Falls $x_1 \neq x_k$ führen wir eine zusätzliche Kante x_kx_1 ein. Der Euler-Weg verlängert sich dadurch zu einem Euler-Rundweg, und nach 1. folgt, dass alle Grade gerade sind. Nimmt man die zusätzliche Kante wieder weg, werden nur die Grade von x_1 und x_k ungerade. Also haben genau 2 Ecken ungeraden Grad, und diese sind der Anfangs- und Endpunkt des Euler-Weges.

" $\Leftarrow$ ": Haben alle Ecken geraden Grad, so gibt es nach 1. sogar einen Euler-Rundweg. Gibt es genau 2 Ecken x, y mit ungeradem Grad, so fügen wir eine zusätzliche Kante xy ein. Im neuen Graph sind alle Grade gerade, und somit gibt es einen Euler-Rundweg nach 1. Entfernen wir xy wieder aus diesem Rundweg, bleibt immer noch ein Euler-Weg übrig.

Bemerkung: Der Satz liefert nicht nur ein Entscheidungskriterium, wann es einen Euler-Weg oder -Rundweg gibt, sondern der Beweis liefert auch einen Algorithmus (Methode) zur Auffindung dieses Weges.

Beispiel: Das "Haus vom Nikolaus" hat zwei Ecken mit ungeradem Grad. Es hat daher einen Euler-Weg (kann also in einem Zug gezeichnet werden), aber keinen Euler-Rundweg. Nach obigem Beweis muss der Euler-Weg in den Ecken mit ungeradem Grad beginnen und enden.

Beispiel: Hat folgender Graph einen Euler-Weg oder -Rundweg?

8

Alle Grade sind gerade, also gibt es einen Euler-Rundweg. a, b, c, d, e, a ist ein Rundweg mit lauter verschiedenen Kanten. Die restlichen Kanten formen den Rundweg a, c, e, b, d, a . Durch Zusammenfügen erhalten wir den Euler-Rundweg $a, b, c, d, e, a, c, e, b, d, a$.

Beispiel: "Königsberger Brücken-Problem". Gibt es in Königsberg einen Spaziergang, der über jede Brücke genau einmal führt. Stadtdplan:

9

Um das Problem durch einen Graphen zu beschreiben wählen wir als Ecken die Stadtteile A, B, C, D und zeichnen für jede Brücke eine Kante. Es ergibt sich ein Graph mit Mehrfachkanten. Aber obiger Satz ist immer noch gültig. Die Eckengrade sind 3,3,3,5. Es gibt also weder einen Euler-Weg noch einen Euler-Rundweg.

3.2 Hamiltonsche Wege

Definition: Ein Weg/Rundweg heißt Hamilton-Weg/Rundweg, wenn er jede Ecke genau einmal durchläuft.

Bemerkung: Es gibt (bisher) keine einfache Methode, um zu entscheiden, ob ein Graph einen Hamilton-Weg enthält, oder um einen solchen zu finden.

Generell findet man Hamilton-Rundwege leicht in Graphen mit vielen Kanten.

Beispiel:

✓

Ein Hamilton-Rundweg ist a, b, c, d, e, a .

In Graphen mit wenig Kanten beachte man für die Konstruktion eines Hamilton-Rundwegs:

- An jeder Ecke müssen genau zwei Kanten für den Hamilton-Rundweg ausgewählt werden.
- Der Rundweg darf sich nicht schließen, bevor alle Ecken erreicht wurden.

Wir bezeichnen mit H die Menge der Kanten des Hamilton-Rundwegs, und entscheiden nach und nach welche Kanten zu H gehören, und welche nicht.

Beispiel: Gibt es einen Hamilton-Weg/Rundweg für folgenden Graph?

S

Hamilton-Rundweg: a und g haben den Grad 2, also $ab, ac, ge, gi \in H$. In i brauchen wir genau eine weitere Kante. Aus Symmetriegründen können wir wählen $ij \in H$ und $ik \notin H$. In k gibt es jetzt nur noch zwei mögliche Kanten: $kj, kh \in H$. Somit $jf \notin H$. Somit $fe, fb \in H$. Somit $bd, de \notin H$. Und in d verbleibt nur noch eine mögliche Kante, was nicht funktioniert. Es kann also keinen Hamilton-Rundweg geben.

Man findet aber leicht einen Hamilton-Weg: $a, b, d, c, h, k, j, i, g, e, f$.

Beispiel: Gibt es einen Hamilton-Weg/Rundweg für folgenden Graph?

↓

Von p aus betrachtet ist der Graph völlig symmetrisch. Wir können daher $po, pn \in H$ und $pm \notin H$ setzen. Es folgt $mb, md \in H$. Wegen $cb, cd \in H$ ergibt sich nun ein zu kleiner Rundweg. Es kann also keinen Hamilton-Rundweg geben.

Ein Hamilton-Weg ist beispielsweise: $m, b, c, d, e, f, g, h, n, p, o, l, a, q, i, j, k$.

4 Matchings

Beispiel: Problem “Heiratsvermittlung”. In folgendem Graphen bezeichnen Kanten, welche Männer und Frauen kompatibel sind.

↘

Offenbar können maximal 5 Paare gebildet werden, und durch Probieren findet man, dass 5 Paare in der Tat möglich sind.

Beispiel: “Arbeitsvermittlung”. Personen $A - F$ sollen Jobs $a - h$ vermittelt werden. Hierbei ist A qualifiziert für c, d , B für c, d , C für a, b, e , D für c, d , E für b, e, f, g, h und F für e, f, g, h . Können alle Personen vermittelt werden?

✓

Nein! Für A, B, D kommen nur zwei Jobs c, d in Frage. 5 Personen können aber leicht vermittelt werden, siehe Zeichnung.

Definition: Ein Graph $G = (E, K)$ heißt bipartit mit Teilen A, B , falls A, B eine Zerlegung von E ist, und Kanten nur zwischen Ecken in A und Ecken in B verlaufen können: Für $xy \in K$ gilt $x \in A$ und $y \in B$ oder $x \in B$ und $y \in A$.

Definition: Sei $G = (E, K)$ ein bipartiter Graph mit Teilen A, B .

- Ein Matching (Paarung) ist eine Teilmenge von Kanten $M \subset K$, so dass jede Ecke in höchstens einer Kante vorkommt.
- Ein Matching von ganz A ist ein Matching, so dass jede Ecke in A in genau einer Kante vorkommt.

Problem: Wie sieht man dem Graphen an, ob ein Matching von ganz A möglich ist? Aus obigem Beispiel ergibt sich, dass zumindest für jede Teilmenge von A genügend Optionen zur Verfügung stehen müssen.

Definition: Sei $G = (E, K)$ ein bipartiter Graph mit Teilen A, B . Für eine Teilmenge $S \subset A$ bezeichne $N_G(S)$ die Menge aller Nachbarn von S , d.h. die Menge der Ecken in B , die durch Kanten mit Ecken in S verbunden sind. $|S|$ bezeichne die Anzahl der Elemente einer Menge.

↪

Definition: Sei $G = (E, K)$ ein bipartiter Graph mit Teilen A, B . Wir nennen G "gut", wenn für jede Teilmenge $S \subset A$ gilt: $|N_G(S)| \geq |S|$.

Lemma 1: Gibt es ein Matching von ganz A , so ist der Graph G gut.

Beweis: Sei $M = \{a_1b_1, \dots, a_nb_n\}$ ein Matching von ganz A . Zu jeder Teilmenge S bestehend aus a_i sind die entsprechenden b_i Nachbarn. Also ist $|N_G(S)| \geq |S|$.

Lemma 2: Sei $G = (E, K)$ ein bipartiter Graph mit Teilen A, B . Ist G gut, und $|A| \geq 2$, so kann man A in Mengen A_1, A_2 und B in Mengen B_1, B_2 zerlegen, so dass die Graphen G_1 (bestehend aus A_1, B_1 und entsprechenden Kanten) und G_2 (bestehend aus A_2, B_2 und entsprechenden Kanten) beide wieder gut sind.

✕

Beweis:

1. Fall: Es gibt eine Teilmenge S mit $|N_G(S)| = |S|$. Wir setzen dann $A_1 = S$, $A_2 = A - S$ (Rest), $B_1 = N_G(S)$, $B_2 = B - N_G(S)$ (Rest), und zeigen, dass G_1 und G_2 gut sind.

↪

G_1 : G_1 enthält alle Nachbarn von S , somit ist $N_{G_1}(S') = N_G(S')$ für alle Teilmengen $S' \subset S$. Da G gut ist, ist also auch G_1 gut.

G_2 : Sei $S' \subset A - S$ eine beliebige Teilmenge. Die Nachbarn von $S \cup S'$ in G sind $N_G(S)$ und die Nachbarn von S' in G_2 , d.h. $|N_G(S \cup S')| = |N_G(S)| + |N_{G_2}(S')|$, also $|N_{G_2}(S')| = |N_G(S \cup S')| - |N_G(S)| \geq |S' \cup S| - |N_G(S)| = |S'| + |S| - |N_G(S)| = |S'|$. Hierbei haben wir verwendet, dass G gut ist, und dass $|N_G(S)| = |S|$ ist.

2. Fall: $|N_G(S)| \geq |S| + 1$ für alle Teilmengen $S \subset A$. Wir wählen $a \in A$ und $b \in N_G(\{a\})$, und setzen $A_1 = \{a\}$, $A_2 = A - \{a\}$, $B_1 = \{b\}$, $B_2 = B - \{b\}$, und zeigen, dass G_1 und G_2 gut sind:

2

Dies ist klar für G_1 und für G_2 wählen wir eine beliebige Teilmenge $S \subset A - \{a\}$. Die Nachbarn von S in G sind die Nachbarn von S in G_2 und möglicherweise noch b . Somit $N_{G_2}(S) \geq N_G(S) - 1 \geq |S| + 1 - 1 \geq |S|$.

Satz: Sei $G = (E, K)$ ein bipartiter Graph mit Teilen A, B . Es gibt genau dann ein Matching von ganz A , wenn der Graph gut ist.

Beweis: Nach Lemma 1 ist nur noch zu zeigen, dass jeder gute Graph ein Matching von ganz A hat. Durch wiederholte Anwendung von Lemma 2 kann G in bipartite Teilgraphen $G_1, \dots, G_n$ zerlegt werden mit Teilen $A_1, B_1, \dots, A_n, B_n$, so dass $|A_1| = 1, \dots, |A_n| = 1$, und alle Teilgraphen gut sind. Sei $A_1 = \{a_1\}, \dots, A_n = \{a_n\}$. Wegen $|N_{G_1}(A_1)| \geq |A_1| = 1$, gibt es ein $b_1 \in B_1$, das durch eine Kante mit a_1 verbunden ist, und ebensolche $b_2, \dots, b_n$. Die Kantenmenge $M = \{a_1 b_1, \dots, a_n b_n\}$ bildet dann ein Matching von ganz A .

A

Bemerkung: Der Beweis liefert einen Algorithmus zur Bestimmung eines Matchings von ganz A , falls ein solches existiert. Das Problem dabei ist, dass alle Teilmengen von A betrachtet werden müssen. Ist A zu groß, dauert das zu lange. Ist etwa $|A| = 100$, so hat A $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{100}$ Teilmengen. (Jedes Element von A hat 2 Möglichkeiten, nämlich in der Teilmenge zu sein oder nicht.) 2^{100} ist eine Zahl mit 30 Stellen. Die Frage ist daher: Gibt es eine schnellere Methode zur Bestimmung eines Matchings?

Definition: Sei $G = (E, K)$ ein bipartiter Graph mit Teilen A, B und M ein Matching. Ein Verbesserungsweg für M ist ein Weg der Form $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ mit $a_1, \dots, a_n \in A$, $b_1, \dots, b_n \in B$ und $b_1 a_2, \dots, b_{n-1} a_n \in M$, so dass a_1 und b_n in M ungepaart sind.

B

Beispiel: In folgendem Graph ist a_2, b_2, a_3, b_5 der einzige Verbesserungsweg.

C

Lemma: Hat ein Matching einen Verbesserungsweg, so gib es ein Matching mit einer Kante mehr.

Beweis: Sei $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ ein Verbesserungsweg. Sei M' die Menge, die aus M entsteht wenn man die Kanten $b_1a_2, \dots, b_{n-1}a_n$ wegnimmt, und dafür $a_1b_1, \dots, a_nb_n$ hinzufügt. M' ist dann auch wieder ein Matching und hat eine Kante mehr.

D

Lemma: Sei M ein Matching in einem guten bipartiten Graphen mit Eckenmengen A und B . Falls M noch kein Matching von ganz A ist, so gibt es einen Verbesserungsweg.

Beweis: Wir wählen zuerst eine möglichst lange Folge von verschiedenen Ecken $a_0, b_1, a_1, b_2, \dots$ mit folgenden Eigenschaften:

- $a_0, a_1, \dots \in A, b_1, b_2, \dots \in B$
- a_0 ist ungepaart, $b_1a_1, b_2a_2, \dots \in M$
- b_1 hat eine Kante zu a_0 , b_2 hat eine Kante zu a_0 oder a_1 , b_3 hat eine Kante zu a_0, a_1 oder a_2 , u.s.w.

Dabei ist zu beachten, dass es ein ungepaartes a_0 gibt, da M noch kein Matching von ganz A ist. Haben wir ferner $a_0, b_1, \dots, b_k, a_k$ konstruiert, so finden wir auch noch b_{k+1} , denn $|N_G(\{a_0, \dots, a_k\})| \geq |\{a_0, \dots, a_k\}| = k + 1$, d.h. es gibt ein $b_{k+1} \neq b_1, \dots, b_k$, das zu einer Ecke in $\{a_0, \dots, a_k\}$ benachbart ist. Die Folge ist also von der Form $a_0, b_1, \dots, a_{n-1}, b_n$; b_n muss ungepaart sein, ansonsten könnten wir die Folge noch weiter fortsetzen.

E

Die Verbesserungsfolge konstruieren wir nun von hinten, beginnend mit b_n . Zuerst finden wir ein $a_k \in \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$, das zu b_n benachbart ist, und das zugehörige b_k . Dann finden wir ein $a_l \in \{a_0, \dots, a_{k-1}\}$, das zu b_k benachbart ist, und das zugehörige b_l , u.s.w. bis wir bei a_0 angekommen sind. Nach Konstruktion der ursprünglichen Folge, ist dann $a_0, \dots, b_l, a_l, b_k, a_k, b_n$ ein Verbesserungsweg.

Beispiel: Betrachte das Matching in folgendem Graphen:

7

Wir haben die Ecken so bezeichnet, dass die Folge $a_0, b_1, a_1, \dots, b_5$ obige Eigenschaften hat: $b_1a_1, b_2a_2, b_3a_3, b_4a_4 \in M$, a_0 und b_5 sind ungepaart und $a_0b_1, a_0b_2, a_0b_3, a_2b_4, a_2b_5 \in K$. Der zugehörige Verbesserungsweg ist a_0, b_2, a_2, b_5 . Das verbesserte Matching ist rechts.

In jedem guten bipartiten Graphen kann man so schrittweise vorgehen, und Matchings mit immer mehr Kanten finden, bis man schließlich ein Matching von ganz A hat.

Beispiel: Finde ein Matching von ganz A in folgendem Graphen:

6

Sind zwei ungepaarte Ecken durch eine Kante verbunden, fügen wir diese dem Matching zu. Wir wiederholen dies, solange es geht. Dies ist noch kein Matching von ganz A und wir definieren eine Folge $a_0, \dots, b_5$ wie oben. Der zugehörige Verbesserungsweg ist a_0, b_1, a_1, b_5 . Dieser führt zu einem größeren Matching. Dies ist ein Matching von ganz A .

5 Gewichtete Graphen

Definition: Ein gewichteter Graph ist ein Graph $G = (E, K)$ zusammen mit einer "Gewichtsfunktion" $w : K \rightarrow \mathbb{R}$, die jeder Kante ein "Gewicht" zuordnet.

Das Gewicht kann verschiedene Interpretationen haben, z.B. Länge der Kante oder die Zeit die es dauert, die Kante zu überqueren, oder Preis dafür, die Kante zu überqueren.

5.1 Kürzester Weg

Problem "Navi": Gegeben ist ein Wegnetz mit entsprechenden Entfernungen zwischen Punkten. Ziel ist es den kürzesten Weg zwischen zwei gegebenen Punkten zu finden, zum Beispiel zwischen A und G in folgendem Wegnetz:

h

Methode 1: "Brute force": Brutales Durchprobieren aller Möglichkeiten. Wir bestimmen alle möglichen Wege von A nach G und deren Gewicht. Wege, die eine Ecke mehr als einmal enthalten scheiden dabei von vornherein aus, so dass nur endlich viele Wege zu betrachten sind.

$ABEG : 1 + 6 + 3 = 10$

$ABEDFG : 1 + 6 + 5 + 8 + 6 = 26$

$ABEDCFG : \dots$

Es gibt zu viele Möglichkeiten, um dies per Hand durchzuprobieren. (Ein Computer würde dies allerdings zumindest in einem kleinen Graphen schaffen.)

Methode 2: "Brute force" mit Raten und Nachdenken: Wahrscheinlich ist der Weg $ABEG$ der Länge 10 am kürzesten. Wir versuchen einen noch kürzeren zu finden. Führt der Weg über die Ecke F , so ist er länger als $7 + 6 = 13$ und scheidet daher aus. Wir können daher F und die zugehörigen Kanten aus dem Graphen löschen.

l

Führt der Weg über C , ist er länger als $5 + 2 + 3 = 10$, wir können also auch C löschen. Führt der Weg über D , ist er länger als $1 + 3 + 5 + 3 = 12$, wir können also auch D löschen. Der Weg $ABEG$ ist somit der kürzeste.

Dies ist zwar besser als Methode 1, aber zu unsystematisch, als dass man dies leicht in ein Computerprogramm umsetzen könnte. Methode 2 ist also auch wieder nur für kleine Graphen praktikabel.

Methode 3: Der Algorithmus von Dijkstra. Wir bestimmen einen "guten" Weg von A zu jeder Ecke X des Graphen mit einer gewissen Länge d_X . Der "gute" Weg von A nach A besteht aus nur einer Ecke A und hat die Länge $d_A = 0$. In jedem weiteren Schritt betrachten wir alle bisher konstruierten "guten" Wege, und fügen am Ende jeweils alle möglichen Kanten an, die zu neuen Ecken führen. Unter all diesen verlängerten Wegen betrachten wir den mit kürzester Länge. Endet dieser in X , so haben wir den "guten" Weg von A nach X gefunden und können d_X ablesen. Dies wiederholen wir solange, bis wir Wege zu allen Punkten haben.

Beispiel:

7

1. Schritt:

Weg	AB	AC
Länge	1	5

 Also $d_B = 1$ mit Weg AB .
2. Schritt:

Weg	AC	ABD	ABE
Länge	5	$1 + 3$	$1 + 6$

 Also $d_D = 4$ mit Weg ABD .
3. Schritt:

Weg	AC	ABE	$ABDC$	$ABDE$	$ABDF$
Länge	5	$1 + 6$	$4 + 2$	$4 + 5$	$4 + 8$

 Also $d_C = 5$ mit Weg AC .
4. Schritt:

Weg	ABE	$ABDE$	$ABDF$	ACF
Länge	$1 + 6$	$4 + 5$	$4 + 8$	$5 + 7$

 Also $d_E = 7$ mit Weg ABE .
5. Schritt:

Weg	$ABDF$	ACF	$ABEG$
Länge	$4 + 8$	$5 + 7$	$7 + 3$

 Also $d_G = 10$ mit Weg $ABEG$.
6. Schritt:

Weg	$ABDF$	ACF	$ABEGF$
Länge	$4 + 8$	$5 + 7$	$10 + 6$

 Also z.B. $d_F = 12$ mit Weg $ABDF$.

Noch leichter kann man dies graphisch umsetzen, indem man einfach d_X zur jeweiligen Ecke X schreibt, und die Wege farbig einzeichnet:

4

Die Frage ist, ob diese Wege wirklich die kürzestmöglichen sind!

Satz: In jedem zusammenhängenden gewichteten Graph liefert der Algorithmus von Dijkstra die kürzesten Wege von A zu allen anderen Ecken (in aufsteigender Reihenfolge).

Beweis: Wir nehmen an, dass der Algorithmus bis zu einem bestimmten Punkt richtig gearbeitet hat, und nun einen Weg von A nach X liefert. Gibt es einen noch kürzeren Weg von A nach X oder zu einem anderen noch nicht betrachteten Punkt, so enthält dieser eine Kante von einem betrachteten Punkt Y zu einem noch nicht betrachteten Punkt X' . Der Weg von A nach X' taucht dann in der entsprechenden Tabelle auf und ist kürzer als der Weg von A nach X . Der Algorithmus von Dijkstra würde dann also X' und nicht X liefern. Widerspruch!

L

Es gibt also keinen noch kürzeren Weg, d.h. der Algorithmus von Dijkstra liefert auch in diesem Schritt den richtigen Weg. Wiederholen wir dieses Argument für jeden Schritt, sehen wir, dass der Algorithmus von Dijkstra alle kürzesten Wege liefert.

Bemerkung: Die letzte Methode ist mit Abstand die beste und schnellste. Sie wird oft angewendet, z.B. für die

- Bestimmung der schnellsten Route im öffentlichen Nahverkehr
- Bestimmung der kürzesten Route im Navigationssystemen
- Bestimmung der billigsten Route im Flugverkehr

5.2 Minimaler Spannbaum

Problem: Orte sollen mit Straßen verbunden werden. Die Kosten für jede Straße sind bekannt. Was ist das billigste Straßennetz, so dass jeder Ort von jedem anderen aus erreichbar ist?

Definition: Sei $G = (E, K)$ ein gegebener Graph. Ein Teilgraph mit Eckenmenge E , der zusammenhängend ist, aber keine überflüssigen Kanten hat (d.h. keine n -Ecke enthält) heißt ein Spannbaum von G .

Bemerkung: Der Algorithmus von Dijkstra liefert zwar einen Spannbaum, aber nicht den minimalen. Zum Beispiel:



Wie bestimmt man also einen minimalen Spannbaum?

Methode 1: "Brute force": Bestimme alle Spannbäume und deren Gesamtgewicht. In großen Graphen gibt es zu viele Spannbäume als dass dies sinnvoll wäre.

Methode 2: "Algorithmus von Kruskal": Ordne die Kanten nach Gewicht, und gehe diese Liste der Reihe nach durch. Wähle jede Kante, falls diese kein n -Eck mit bisher gewählten Kanten bildet.

Beispiel: In obigem Graphen haben wir die Kanten AB (1), CD (2), BD (3), EG (3), AC (5), DE (5), BE (6), FG (6), CF (7), CD (7), DF (8).



Wir wählen AB , BD , EG , (nicht AC , sonst 4-Eck), DE , (nicht BE , sonst 3-Eck), u.s.w.

Satz: In jedem zusammenhängenden gewichteten Graph $G = (E, K)$ liefert der Algorithmus von Kruskal einen Spannbaum von G mit minimalem Gesamtgewicht.

Beweis: Sei B der Teilgraph, den der Algorithmus von Kruskal liefert. B ist zusammenhängend. (Andernfalls gibt es eine Komponente von B , die noch nicht ganz B ist. Also gibt es eine Kante xy , von der nur ein Eckpunkt in der Komponente liegt. Durch hinzufügen dieser Kante ergibt sich kein n -Eck, daher hätte diese Kante vom Algorithmus von Kruskal ausgewählt werden müssen. Widerspruch.) Nach Konstruktion enthält B kein n -Eck. Somit ist B ein Spannbaum.

Sei nun B' ein beliebiger anderer Spannbaum, so gibt es eine Kante k , die in B ist aber nicht in B' , mit minimalem Gewicht. Fügen wir k zu B' , so entsteht ein Kreis, und B

kann nicht diesen ganzen Kreis enthalten, etwa nicht k' . Wir möchten zeigen, dass durch hinzufügen von k und wegnehmen von k' aus B' ein neuer Spannbaum B'' entsteht, der weniger Gewicht hat, und mehr Kanten mit B gemeinsam hat.



Dafür müssen wir uns nur überlegen, dass $w(k) \leq w(k')$ ist. Andernfalls wäre k' noch vor k im Algorithmus von Kruskal betrachtet worden und zu B hinzugefügt worden. (Beide Kanten bilden kein n -Eck mit vorher betrachteten Kanten.) Widerspruch!

Auf diese Weise können wir jeden beliebigen Spannbaum schrittweise verändern, so dass er immer mehr Kanten mit B gemeinsam hat, und immer weniger Gewicht hat, bis wir am Schluss B selbst erhalten. Hieraus folgt, dass B minimal ist.

Beispiel: Wir starten mit einem beliebigen Spannbaum, und gehen die Kanten der Reihe nach durch (von leicht bis schwer). Gemäß obigem Beweis können wir schrittweise je eine Kante hinzufügen und wegnehmen, so dass das Gesamtgewicht immer kleiner wird, und am Schluss der Graph aus dem Algorithmus von Kruskal übrig bleibt:



5.3 Minimaler Rundweg

Problem "Einkaufstour". Wie findet man einen Rundweg durch einen Graphen mit minimaler Länge?

Methode 1: "Brute Force": Finde alle möglichen Rundwege und deren Länge.

Beispiel:



$HABCH$ hat die Länge 49, $HACBH$ die Länge 56, $HBACH$ die Länge 61, und die Wege $HBCAH$, $HCABH$, $HCBAH$ sind die gleichen in umgekehrter Reihenfolge. Der kürzeste Rundweg ist somit $HABCH$ (oder in umgekehrter Reihenfolge).

Wie viele Rundwege gibt es bei n Ecken? Wir starten in einer festen Ecke. Es gibt $(n - 1)$ Möglichkeiten für die Wahl der nächsten Ecke, $(n - 2)$ Möglichkeiten für die Wahl der nächsten Ecke, u.s.w. bis hin zu nur 1 Möglichkeit für die Wahl der letzten Ecke. Die Anzahl aller Möglichkeiten ist also $(n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$. Berücksichtigen wir die Wege mit umgekehrter Reihenfolge ergibt sich somit $\frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{2}$. In einem Graph mit 20 Ecken ergeben sich beispielsweise 1216451004088320000 Möglichkeiten. Dies ist nicht praktikabel.

Eine gute Methode zur Lösung des Problems ist bisher nicht bekannt! Das Problem heißt "Traveling salesman problem", und viele Mathematiker glauben, dass es gar keinen einigermaßen schnellen Algorithmus zur Lösung des Problems geben kann, aber auch dies konnte bisher nicht bewiesen werden.

6 Färbungen

6.1 Eckenfärbungen

Definition: Eine (Ecken-)Färbung von $G = (E, K)$ mit n Farben ist eine Abbildung $f : E \rightarrow \{1, \dots, n\}$, so dass für jede Kante in K die beiden Endpunkte unterschiedlich gefärbt sind. Die chromatische Zahl von G ist $\chi(G) :=$ minimale Anzahl von Farben, für die es eine Färbung von G gibt.

Definition: Sei V_n der Graph mit n Ecken, wo zwischen allen Ecken je eine Kante ist. V_n heißt vollständiger Graph mit n Ecken.

$\mathbb{R}$

Beispiel: $\chi(V_n) = n$, denn alle Ecken müssen unterschiedlich gefärbt werden.

Beispiel: In folgendem Graph ist eine Färbung gegeben durch $a \mapsto 1$, $b \mapsto 2$, $c \mapsto 2$, $d \mapsto 1$, $e \mapsto 3$.

$\mathbb{S}$

Hieraus folgt, dass 3 Farben ausreichen: $\chi(G) \leq 3$. Andererseits enthält der Graph ein Dreieck ($\cong V_3$), daher benötigt man auch mindestens 3 Farben: $\chi(G) \geq 3$, also insgesamt $\chi(G) = 3$.

Problem "Party". Wir zeichnen unseren Freundeskreis als Graph, wobei die Kanten zwischen Personen gezeichnet werden, die sich nicht leiden können. Wir färben die Personen, je nachdem zu welcher Party sie eingeladen werden sollen. Die Bedingung dass auf einer Party nur Leute sein sollen, die sich leiden können, ist genau die Bedingung, dass die Endpunkte jeder Kante unterschiedlich gefärbt sein sollen.

Beispiel: Wie viele Partys muss man geben, wenn der Freundeskreis so aussieht:

$\mathbb{T}$

Da der Graph ein Dreieck enthält, folgt $\chi(G) \geq 3$. Eine Färbung mit drei Farben ist aber nicht möglich, denn der Graph enthält folgendes "5-Rad":



Sei 1 die Farbe der Mitte, und versucht man mit 3 Farben auszukommen, müssen am Rand abwechselnd mit 2 und 3 gefärbt werden, was nicht möglich ist. Es gilt also $\chi(G) \geq 4$. Eine Färbung von G mit 4 Farben ist in der Tat möglich:



Somit ist $\chi(G) = 4$, d.h. 4 Parties sind gerade ausreichend.

Satz: Ist g der minimale Grad von G , so ist $\chi(G) \leq g + 1$, d.h. G kann mit $g + 1$ Farben gefärbt werden.

Beweis: Seien $e_1, \dots, e_n$ die Ecken von G . Sind $e_1, \dots, e_k$ bereits gefärbt, so können wir e_{k+1} auch färben, ohne dass sich ein Konflikt ergibt: Diese Ecke hat nämlich höchstens g Nachbarn, und somit ist mindestens eine Farbe für die Färbung übrig. Schrittweise können wir so den ganzen Graphen färben.

Problem "Landkarte". Die Länder formen die Ecken eines Graphs. Wir zeichnen Kanten zwischen Ländern, die eine gemeinsame Grenze haben. Eine Färbung der Landkarte, bei der zwei Länder mit gemeinsamer Grenze unterschiedlich gefärbt sind, entspricht dann einer Färbung des Graphen, wo die Endpunkte jeder Kante unterschiedlich gefärbt sind.

Beispiel: Für die Deutschlandkarte und den zugehörigen Deutschlandgraph erhalten wir $\chi(G) = 3$: $\chi(G) \geq 3$, weil der Graph 3-Ecke enthält und ein Beispiel mit 3 Farben ist angegeben:



Ein Graph, den man aus einer Karte gewinnt, hat die Besonderheit, dass die Kanten kreuzungsfrei gezeichnet werden können.

Definition: Ein Graph, bei dem die Kanten kreuzungsfrei gezeichnet werden können, heißt planar.

Satz: Sei G ein planarer Graph. Es ist $\chi(G) \leq 4$. (Insbesondere kann also jede Landkarte mit höchstens 4 Farben gefärbt werden!).

Dieser sogenannte 4-Farben-Satz, wurde schon um 1850 vermutet, konnte aber erst 1976 bewiesen werden, und bisher ist der Beweis nur unter Verwendung eines Computers möglich! (Zitat: "Ein guter mathematischer Beweis ist wie ein Gedicht. Dieser Beweis ist eher wie das Telefonbuch".)

Welche Graphen sind planar? Bei der Entscheidung hilft (in kleinen Graphen) die Kreis-Sekanten-Methode:

Versuche ein möglichst großes n -Eck im Graphen zu finden, und zeichne dieses als Kreis. Kanten und Wege zwischen diesen Punkten können als Sekanten innen oder außen gezeichnet werden. Dabei fängt man mit einer beliebigen Kante an, zeichnet diese z.B. innen, dies erzwingt, dass ein paar andere Kanten und Wege außen bzw. innen verlaufen, u.s.w.

Beispiel: Ist V_4 planar?



Zeichne a, b, c, d, a als Kreis, und die Kante ac als innere Sehne. Die Kante bd muss dann äußere Sehne sein. Fertig. Der Graph ist also planar. Das dritte Bild zeigt eine weitere Möglichkeit, den Graphen überschneidungsfrei zu zeichnen.

Beispiel: Ist V_5 planar?



Zeichne a, b, c, d, e, a als Kreis, und die Kante ac als innere Sehne. bd und be müssen dann außen verlaufen. ad und ce müssen dann innen verlaufen und schneiden sich zwingenderweise. Der Graph ist also nicht planar.

Bemerkung: Der "Satz von Kuratowski" beschreibt genau, welche Graphen planar sind.

6.2 Kantenfärbungen

Definition: Sei $G = (E, K)$ ein Graph. Eine Kantenfärbung mit n Farben ist eine beliebige Abbildung $f : K \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

Beispiel: Finde eine Kantenfärbung von V_5 mit zwei Farben, so dass kein gleichfarbiges 3-Eck entsteht.

?

Satz: Für jede beliebige Kantenfärbung von V_n mit zwei Farben ($n \geq 6$) gibt es ein gleichfarbiges 3-Eck.

Beweis: Betrachte eine beliebige Ecke a . Es ist $\deg(a) \geq n - 1 \geq 5$, d.h. mindestens drei Kanten von a aus haben die gleiche Farbe, etwa ab, ac, ad haben Farbe 1. Hat mindestens eine der Kanten bc, bd, cd auch Farbe 1, haben wir ein 3-Eck der Farbe 1 und sind fertig. Andernfalles haben bc, bd, cd alle die Farbe 2, und bilden somit ein 3-Eck der Farbe 2.

Ω

Dies kann man in verschiedene Richtungen verallgemeinern, z.B. folgendermaßen:

Definition: Die Ramsey-Zahl $R(s)$ ist definiert als die kleinste Zahl n , so dass jede Kantenfärbung von V_n mit 2 Farben V_s als einfarbigen Untergraphen enthält.

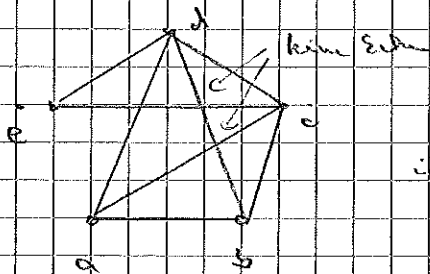
Beispiel: Aus obigem Satz und Beispiel ergibt sich $R(3) = 6$, denn jede Kantenfärbung von V_6 mit 2 Farben enthält V_3 als einfarbigen Untergraphen, nicht aber jede Kantenfärbung von V_5 , somit ist 6 die kleinste Zahl, so dass dies zutrifft.

Bemerkung: Außerdem ist bekannt, dass $R(4) = 18$, $43 \leq R(5) \leq 49$, $102 \leq R(6) \leq 165$. Aber selbst $R(5)$ ist bislang unbekannt.

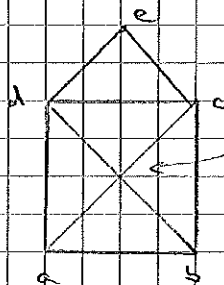
Warum kann man nicht einfach einen Computer benutzen, um alle möglichen Färbungen durchzuprobieren, und testen, ob es V_5 als einfarbigen Untergraphen gibt? Es gibt zu viele Möglichkeiten: V_{44} hat $\frac{44 \cdot 43}{2} = 946$ verschiedene Kanten, und für jede gibt es 2 Möglichkeiten sie zu färben. Es gibt also $2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{946}$ mögliche Kantenfärbungen, die man alle durchprobieren müsste. 2^{946} ist eine ungefähr 300-stellige Zahl. (Dies ist ein Vielfaches der geschätzten Anzahl aller Atome des Universums.)

2.1.

②



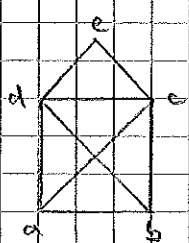
oder
inkludiert



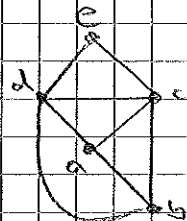
①

a

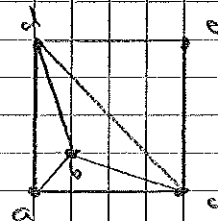
③



=

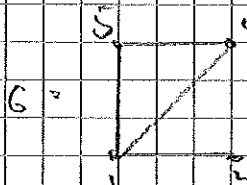


=

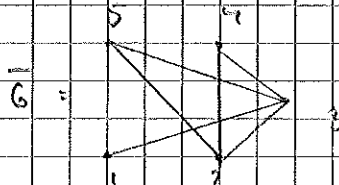


b

④



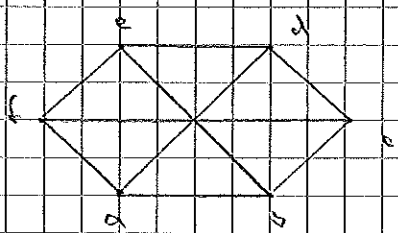
=



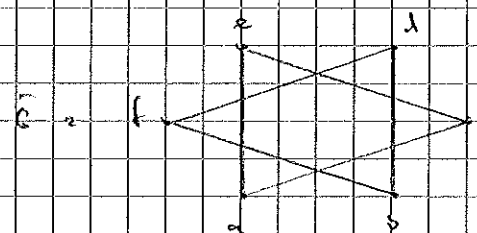
=

a

⑤



=

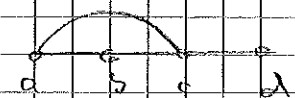


b

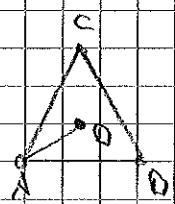
2.2.

G

⑥

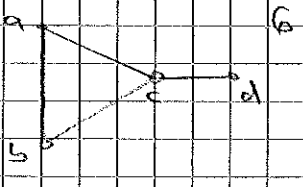


G)

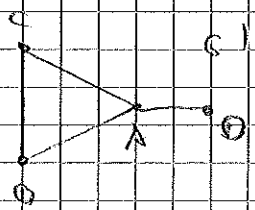


b

⑦

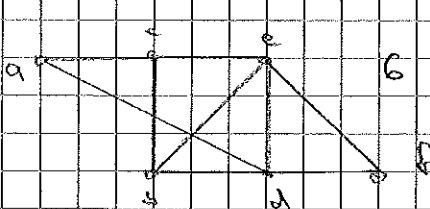


G)

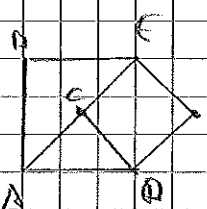


a

⑧



G)



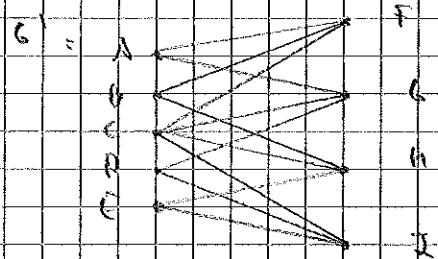
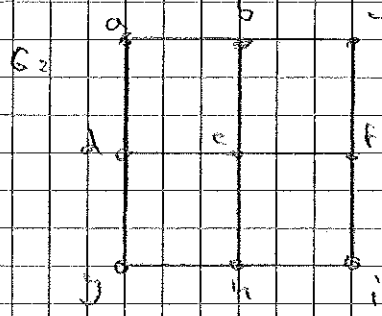
F

G)

b

22.

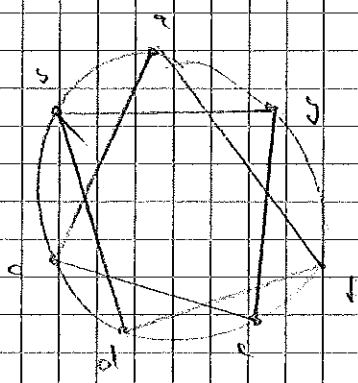
(5)



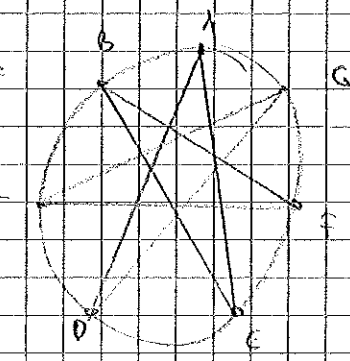
L_0

(6)

G_2

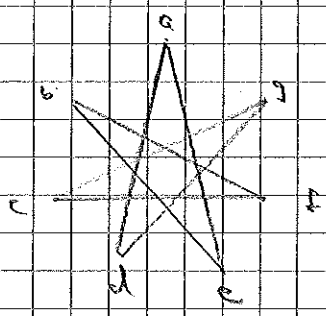


G_1

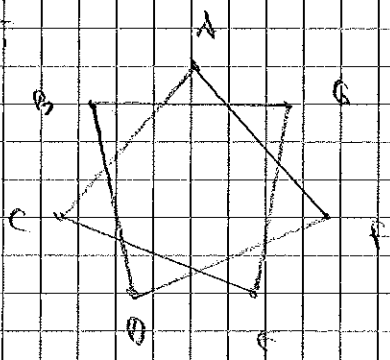


L_1

G_2



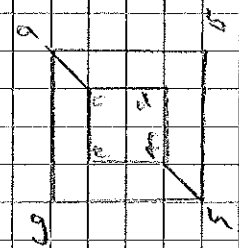
G_1



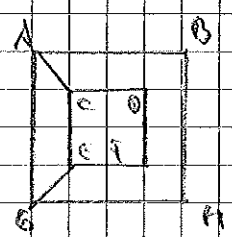
L_2

(7)

G_2



G_1



L_3

0

1

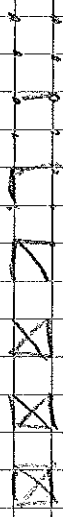
2

3

4

5

6

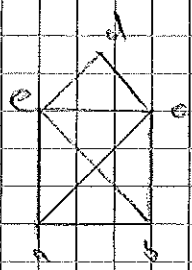


L_4

L_5

3.1

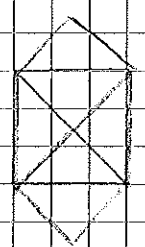
(1)



Einmal die 13



h

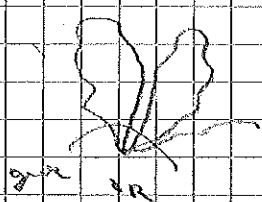


Einmal die 13



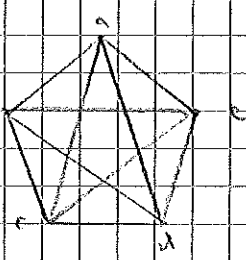
h

(2)

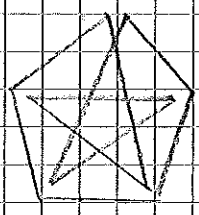


h

(3)

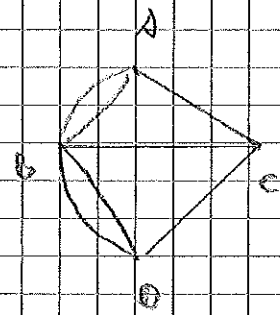
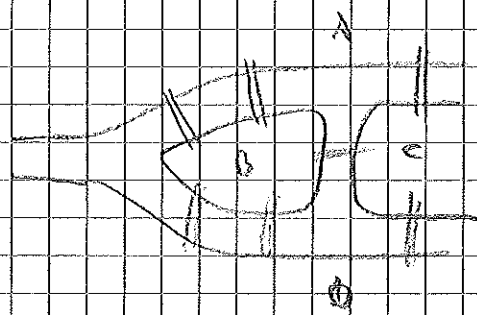


Einmal die 13



h

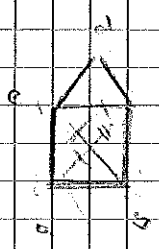
(4)



h

3.2

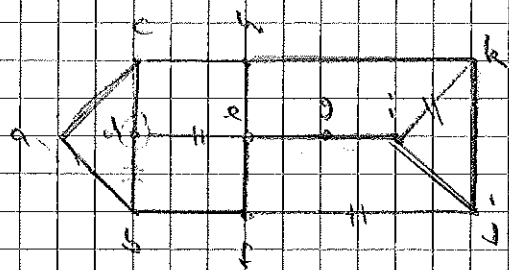
(1)



h

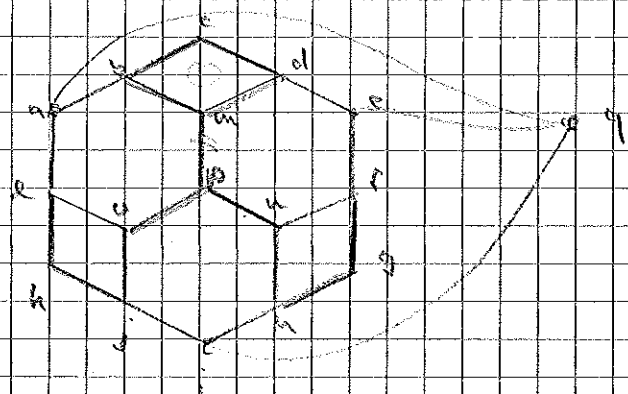
4

(b)



5

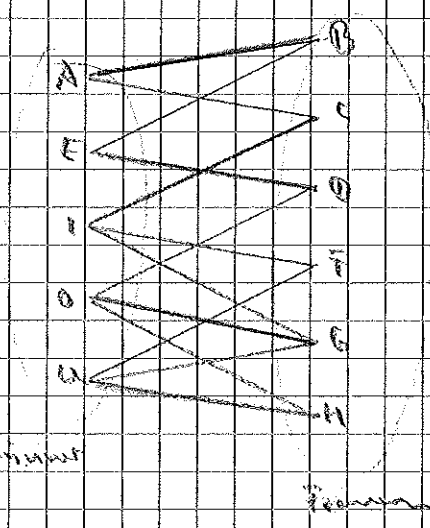
(c)



6

7.

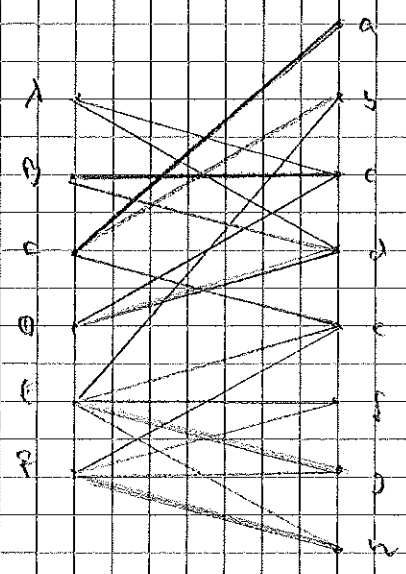
(d)



7

Plumber

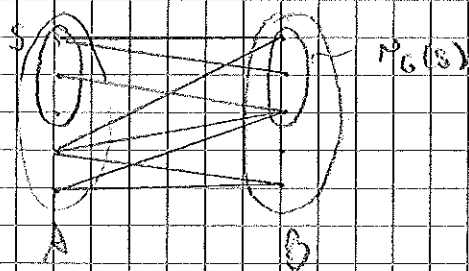
Ironman



✓

(5)

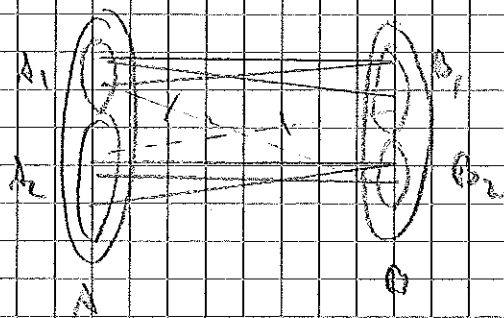
5



$P_G(S)$

$$|S| = 3, |N_G(S)| = 3$$

W

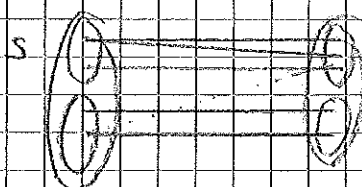


G_1

G_2

X

1 p.a



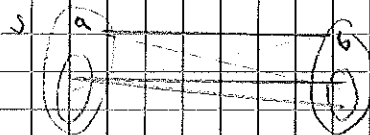
$N_G(S)$

$$|S| = |N_G(S)|$$

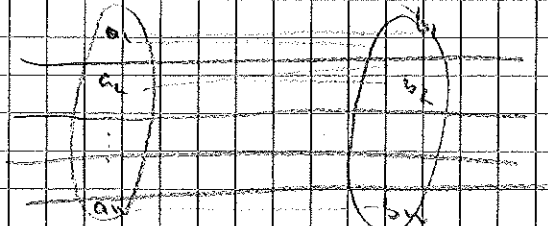
3

(6)

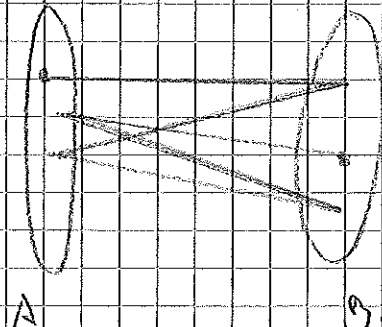
2 p.a



2

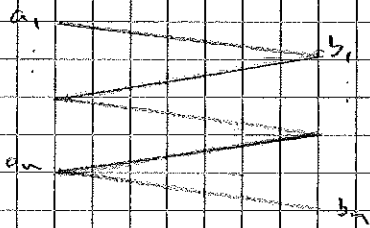
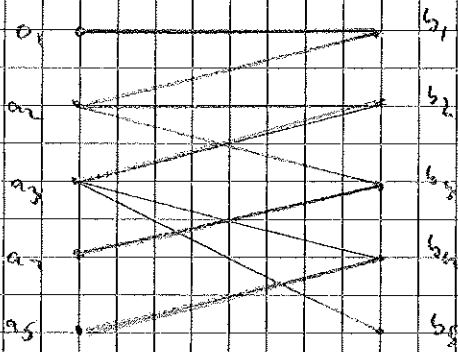


A

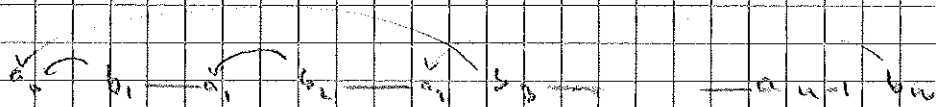
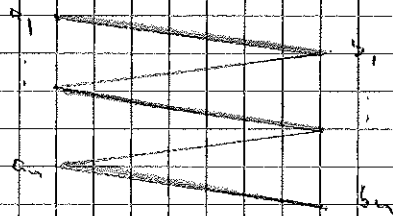


B

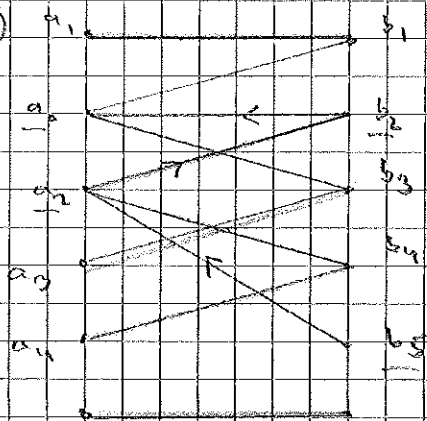
(13)



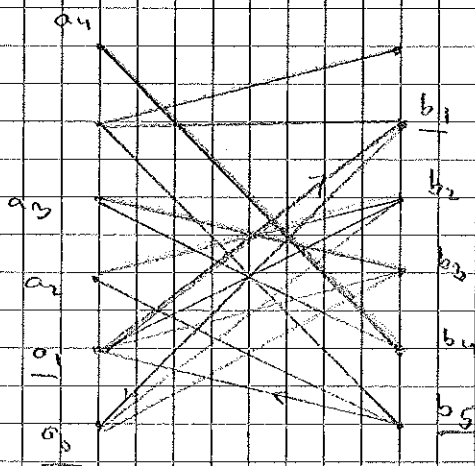
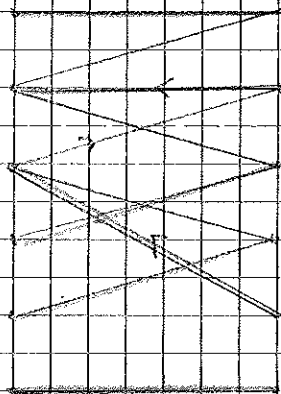
→



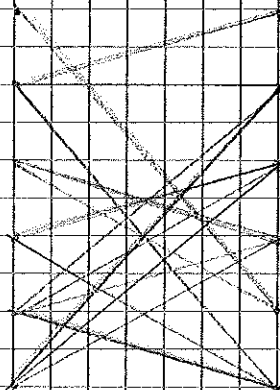
(14)



→



→



h

c

d

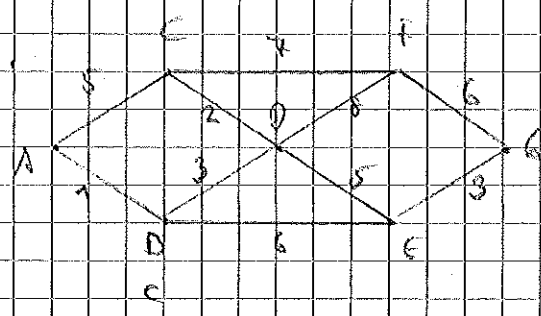
e

f

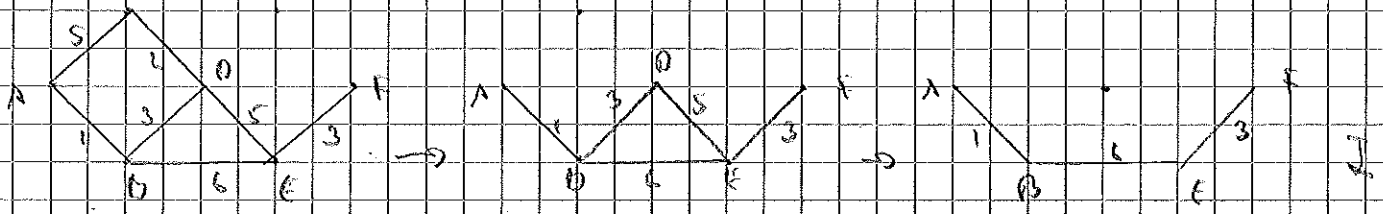
g

S.1.

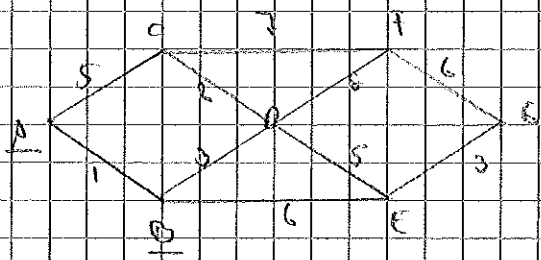
(10)



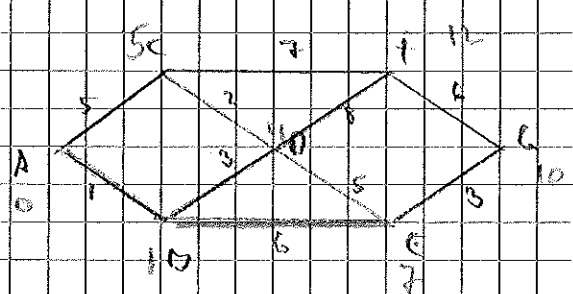
H



(11)

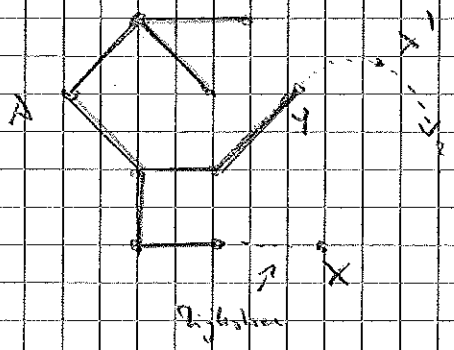


J



K

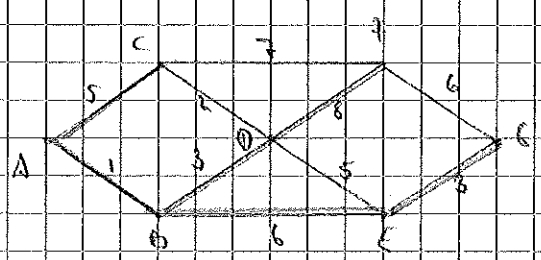
(12)



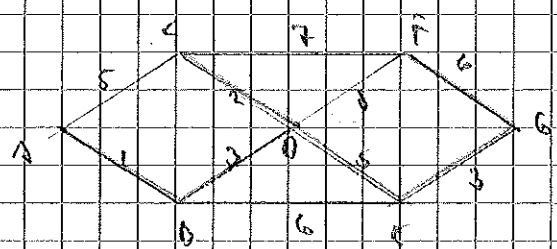
L

S.2.

(13)



Answer



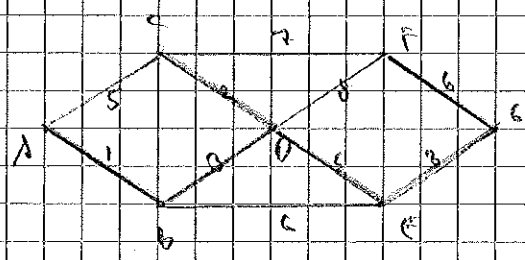
Answer: 26

25

M

5.2.

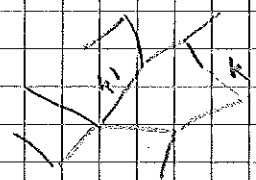
(19)



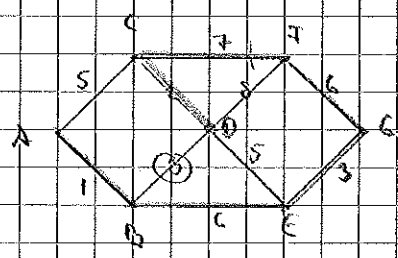
N

(20)

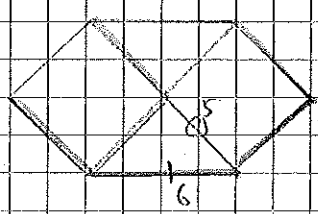
B'



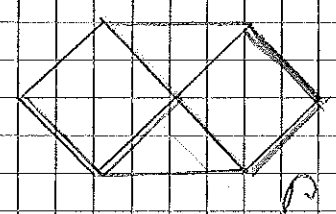
G



→

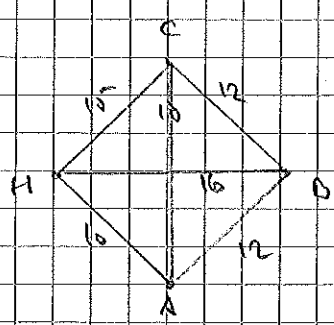


→



5.3.

(21)



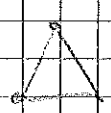
R

6.1.

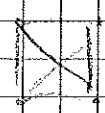
(22)



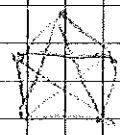
V₂



V₃

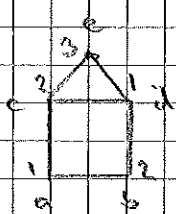


V₄



V₅

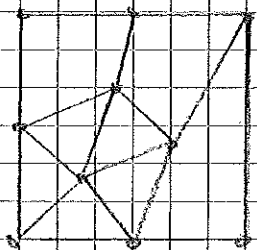
R



G

22

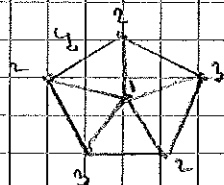
6 4



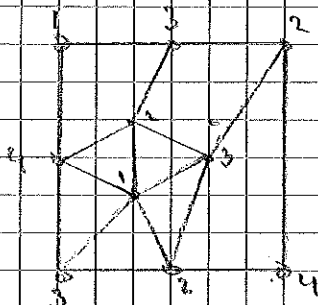
63

7

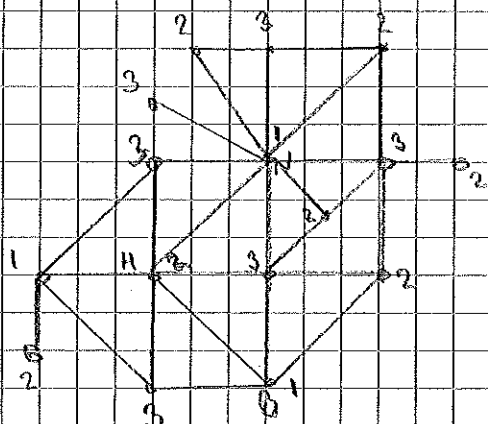
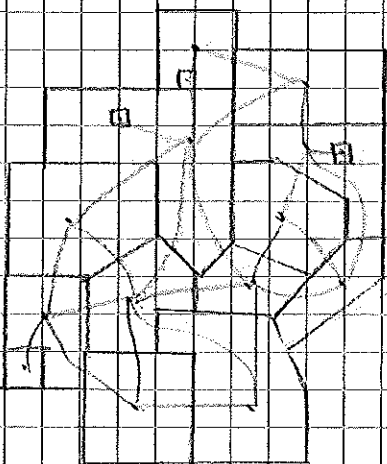
23



4

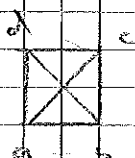


✓

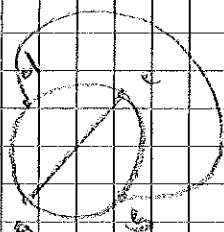


✓

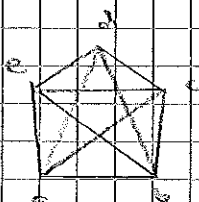
24



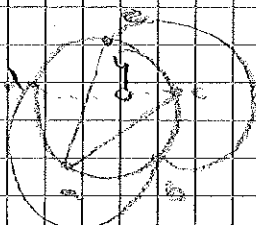
112



X



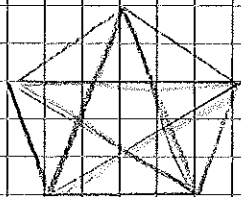
112



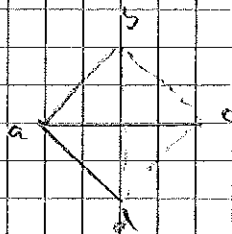
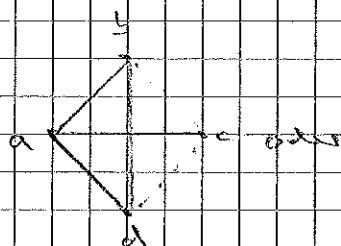
4

6.2

(21)



3



2