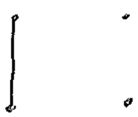
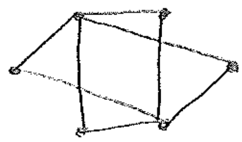
Übungsblatt Montag

1.

	Ecken	Kanten
a)	Schüler	kennt
b)	Flughafen/Stadt	Flugverbindung
c)	Schüler, Instrumente	spielt
d)	Personen	kennt

2. Die Komplemente sind

a)  b)  c) 

a) hat 4 Ecken mit Graden, 2×2, 2×3

b) hat 5 Ecken alle mit Grad 2

c) hat 6 Ecken mit den Graden 2×1, 2×2, 2×3

a), b) sind zusammenhängend, c) hat 2 Komponenten

3) a) Sei G nicht zusammenhängend, $x, y \in E$

<u>1. Fall</u>: x, y sind in der selben Komponente von G.
Dann gibt es ein $z \in E$ in einer anderen Komponente
$\Rightarrow$ xz, yz sind Kanten von $\overline{G}$; x und y sind in $\overline{G}$ verbunden

<u>2. Fall</u> x, y sind in verschiedenen Komponenten von G
Nach Definition des Komplements ist xy eine Kante in $\overline{G}$.

Zwei beliebige Ecken von $\overline{G}$ sind also in jedem Fall verbunden.

b) ja, z.B. 2b)

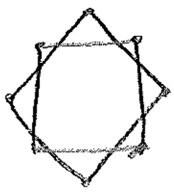
4. $a \hat{=} c$, $b \not\hat{=} a, c$

- b hat 2 Komponenten, a und c nur eine.
- Man kann c zu a "auseinander klappen"

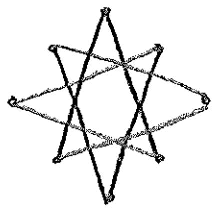
5. a) Nicht isomorph wegen unterschiedlicher Grade
(3×2, 3×4 versus 2×2, 4×4)

b) isomorph, etwa durch Konstruktion eines Isomorphismus, beginnend bei der Ecke mit Grad 5 oder durch schrittweises überführen in den anderen Graphen.

c) Nicht isomorph, betrachte dazu die Komplemente



und



2 Komponenten

1 Komponente

d) Nicht isomorph. Wir zeigen, dass der Versuch der Konstruktion eines Isomorphismus scheitern muss:
Da d bzw. 5 die einzigen Ecken mit Grad 5 sind muss $d \mapsto 5$ gelten.
Damit $h \mapsto 8$ (einzige angrenzende Ecke mit Grad 3).
$\Rightarrow$ $g \mapsto 7$ (einzige an h bzw. 8 ang. Ecke mit Grad 3).
~~$\Rightarrow$ dg $\mapsto$ 57, aber dg gibt es~~
Da 57 eine Kante ist müsste auch dg eine Kante sein, ist sie aber nicht. Widerspruch.

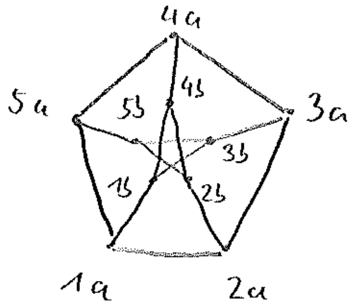
6. Alle Graphen haben 8 Ecken, jeweils mit Grad 3 außer G und H (Grad 4). Damit ist der 3. Graph nicht isomorph zu den Anderen.

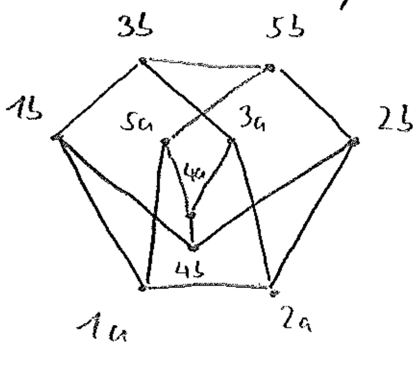
6) Die Graphen 1, 4 und 5 sind isomorph.
Eine Isomorphie ist etwa:

$$1,2,3,4,5,6,7,8 \longleftrightarrow t,u,y,x,s,v,z,w \longleftrightarrow S,W,X,T,Z,V,U,Y$$

Die Graphen 2 und 3 sind weder zueinander noch zu den anderen isomorph.
Beim 3. Graphen gilt dies etwa da G und H Grad 4 haben, während bei den anderen Graphen sämtliche Punkte Grad 3 haben.
Der 2. Graph enthält Fünf-Ecke wie z.B. a-e-h-f-b-a.
Der 5. Graph ist ein sog. bipartiter Graph (der Begriff wird in der Vorlesung noch genauer erläutert). Die Ecken S, T, U, V haben nur Kanten mit den Ecken W, X, Y, Z. ~~Daher hat jeder geschlossene Weg eine gerade A~~ Daher hat er nur n-Ecke mit geradem n (wir müssen immer im rauf-runter-Paaren gehen), insbesondere kein 5-Eck.

7) Wir geben den Isomorphismus durch Benennung der Kanten an:

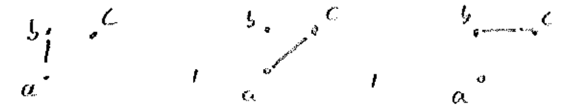




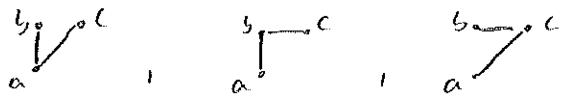
8) a) Wir können 3 Punkte mit max. 3 Kanten verbinden.

0 Kanten:

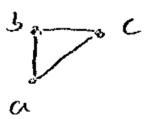
1 Kante



2 Kanten



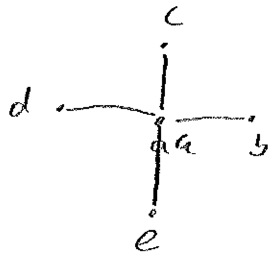
3 Kanten



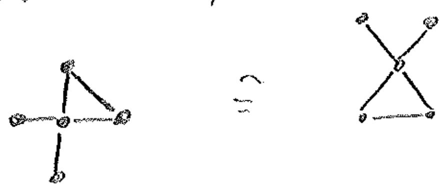
b) Die Graphen mit der gleichen Anzahl an Kanten sind jeweils isomorph.

8) Wir untersuchen die Graphen mit 5 Ecken und 5 Kanten systematisch, indem wir nach den vorkommenden maximalen Kantengrad unterscheiden. Der max. Kantengrad ~~eines~~ ~~5-Eck~~ bei 5 Ecken ist 4:

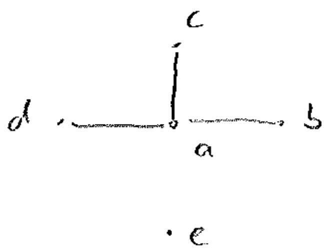
1. Fall: max. Grad = 4



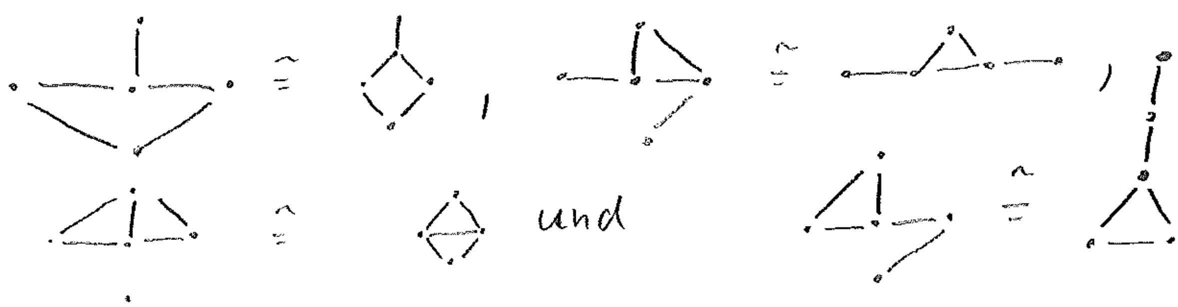
Wir können noch eine Kante setzen (allerdings nicht bei a). Egal für welche der 4 mögl. Kanten wir uns entscheiden, die entstehenden Graphen sind isomorph:



2. Fall: max. Grad = 3



Hier haben wir noch 2 Kanten übrig. Wir können nicht ae verwenden, denn sonst hätte a Grad 4.
Wir erhalten (bis auf Isomorphie) die 4 Graphen:



3. Fall: max. Grad = 2
Dann müssen alle Ecken Grad 2 haben, und wir erhalten als Graphen: