Übungsblatt Donnerstag

1) ja. z.B.

9 Uhr	Hr. Match
10 Uhr	Hr. Menge
11 Uhr	Fr. Graph
12 Uhr	Fr. Kante
13 Uhr	Hr. Nikolaus
14 Uhr	Hr. Ring

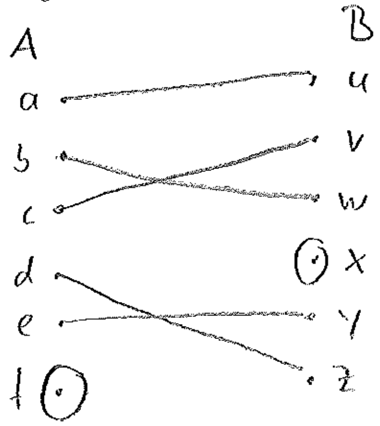
2) Nein, da X, Y, Z nur von den 2 Autos D, E erreicht werden kann

3) Dies ist möglich, da wir diese Situation durch einen guten bipartiten Graphen beschreiben können. So gibt es nach Vorlesung ein Matching der Stämme ($\hat{=}$ A) mit den Vogelarten.

Warum ist der Graph gut?

Wir nehmen eine beliebige Teilmenge S der 6 Stämmen, sagen wir n Stämme ($1 \leq n \leq 6$), diese bewohnen $n \cdot 100\ km^2$. Darauf finden sich mindestens n Vogelarten ($= N_G(S)$), denn sonst hätte sich eine Vogelart auf mehr als $100\ km^2$ verbreitet,

also: $|N_G(S)| \geq n = |S|$.

4) 

Wir gehen wie Skript im Beweis des Lemma's zur Existenz von Verbesserungswegen vor.

a_0 ist hier f, die weiteren Kanten (und damit auch die Punkte) sind

zd, ua, ey $\in$ M

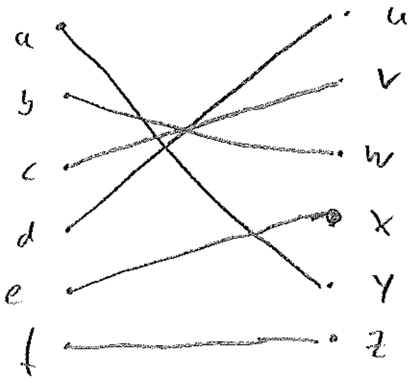
Die dritte Bedingung ist erfüllt, da fz, du, ay $\in$ M. b_n ist hier x. Wir beginnen mit der Konstruktion der Verbesserungsfolge von x aus.

$$b_n = x \xrightarrow{\text{ben. A}} e \xrightarrow{\text{zug. B}} y \xrightarrow{\text{ben. A}} a \xrightarrow{\text{zug. B}} u \xrightarrow{\text{ben. A}} d \xrightarrow{\text{zug. B}} z$$

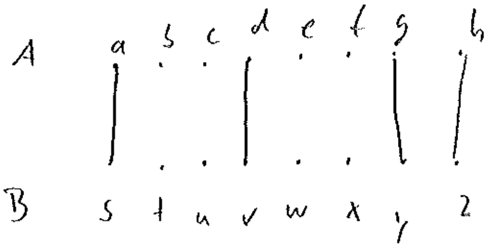
$$\xrightarrow{\text{ben. A}} f = a_0$$

Unsere Verbesserungsfolge ist also f z d u a y e x

Und das verbesserte Matching sieht so aus:

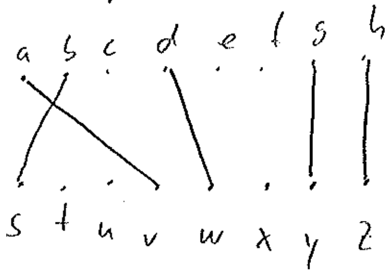


5) Wir beginnen mal ganz naiv mit dem Matching bestehend aus allen senkrechten Kanten:



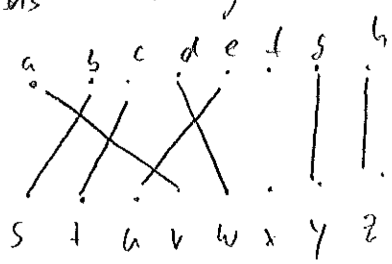
$M = (as, dv, gy, hz)$

- Verbesserungsweg für b:
  Eine Eckenfolge ist $b\,s\,a\,v\,d\,w$ mit $b, a, d \in A$; $s, v, w \in B$
  $sa, vd \in M$ und $bs, av, dw \in K$.
  Die Voraussetzungen im Beweis des Lemmas sind erfüllt und die Folge $b\,s\,a\,v\,d\,w$ ist bereits die Verbesserungsfolge.
  Das neue Matching ist



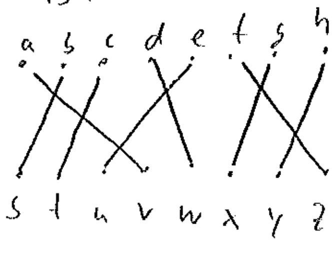
$M = (bs, av, dw, gy, hz)$

- c, e
  Hier brauchen wird gar keine Verbesserungswege betrachten, wir fügen nur die Kanten ct und eu ins Matching ein:



$M = (av, bs, ct, dw, eu, gy, hz)$

- Verbesserungsweg für f:
  Die Eckenfolge $f\,z\,h\,y\,g\,x$ erfüllt auch die gewünschten Voraussetzungen: $zh, yg \in M$; $fz, hy, gx \in K$ und ist bereits Verbesserungsfolge. Das Matching von ganz A ist damit:



$M = (av, bs, ct, dw, eu, fz, gx, hy$

6) Wir unterstreichen in jedem Schritt den/die kürzesten Weg(e), die Striche zum nächsten Schritt sind die Verlängerungen des Wegs.

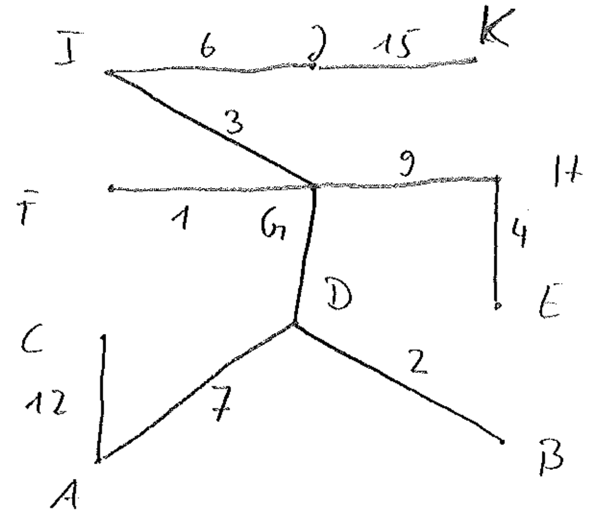
1. Schritt	AB 1				AC 3		
2. Schritt	ABE 3	ABD 6			AC 3		
3. Schritt	ABEH 10	ABEI 4	ABD 6		ACF 10	ACG 7	
4. Schritt	ABEH 10	ABEIK 15	ABEIL 13	ABD 6	ACF 10	ACG 7	
5. Schritt	ABEH 10	ABEIK 15	ABEIL 13	ABDH 8	ACF 10	ACG 7	
6. Schritt	ABEH 10	ABEIK 15	ABEIL 13	ABDH 8	ACF 10	ACGJ 16	
7. Schritt	ABEH 10	ABEIK 15	ABEIL 13	ABDHK 11	ACF 10	ACGJ 10	
8. Schritt	ABEHK 13	ABEIK 15	ABEIL 13	ABDHK 11	ACFI 13	ACGJF 16	ACGJL 11
9. Schritt	ABEHK 13	ABEIK 15	ABEIL 13	ABDHKM 15	ACFI 13	ACGJF 16	ACGJLM 16

⇒ Der kürzeste Weg von A nach M ist also ABDHKM mit Länge 15.

7) Wir listen die Kanten nach Gewichten geordnet, von kleinstem Gewicht zum Größten. Jede Kante hat ein um 1 größeres Gewicht als die vorherige:

FG, DB, IG, HE, IF, IJ, AD, DG, GH, EB, AB, CA, CF, CG, JK, KH, GE, CD, DE, GK

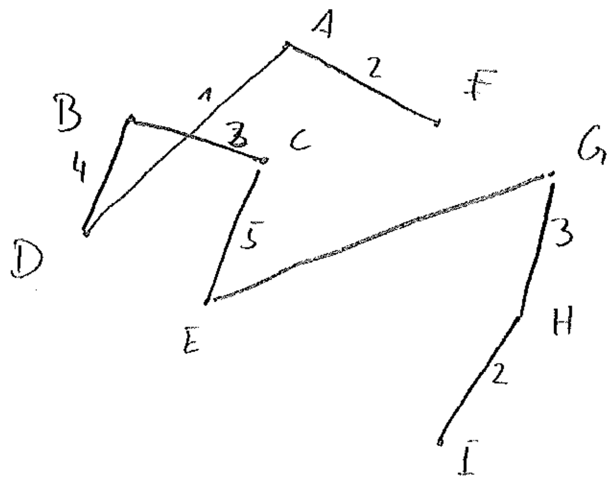
Daraus konstruieren wir folgenden minimalen Spannbaum S:



IF $\notin$ S, denn sonst wäre das Dreieck IFG im aufspannenden Baum enthalten; EB $\notin$ S wegen BDGHE; AB $\notin$ S wegen ADB, KH $\notin$ S wg. HGIJK; CF $\notin$ S wegen FGDAC; CG $\notin$ S wg. GDCA; DE $\notin$ S wg. DGHE, GK $\notin$ wg GIJK GE $\notin$ S wegen GHE; CD $\notin$ S wg. DAC;

S hat damit Gesamtgewicht 59.

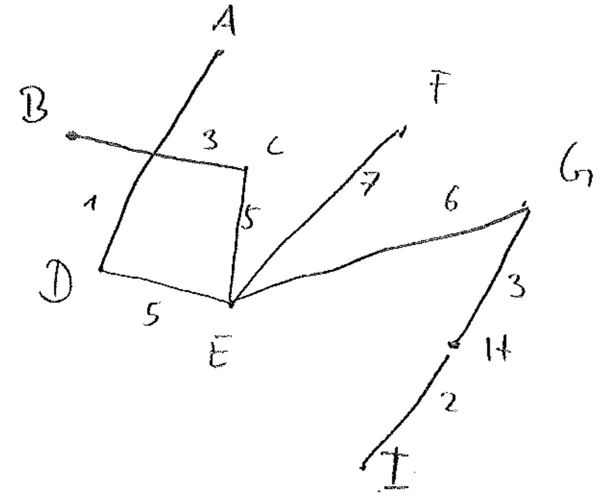
8) a) Ein Flugplan mit minimalen Verlusten ist ein minimaler aufspannender Baum S. Wir gehen wieder nach dem Algorithmus von Kruskal vor und erhalten:



ED $\notin$ S wg. DBCE;
BA $\notin$ S wg. ADB;
FG $\notin$ S wg. GECBDAF;
EF $\notin$ S wg. ECBDAF;
CH $\notin$ S wg. CEGH;
EH $\notin$ S wg. EGH

S hat Gesamtgewicht 20.
Wir hätten an manchen Stellen auch eine andere Wahl treffen können z.B. ED statt CE. Das ändert aber nichts am Gewicht des resultierenden aufspannenden Baumes.

b) Wir suchen hier die kürzesten Verbindungen der Ecke E(alenstadt) zu allen anderen Ecken. Das erreichen wir z.B. mit dem Algorithmus von Dijkstra
Es ergibt sich der Graph:



9) Dies ist ein Traveling salesman problem und wie wir aus der Vorlesung wissen ist kein angemessen schneller Algorithmus bekannt, der das Problem löst. Es hilft wohl nur rohe Gewalt, oder englisch "brute force".
Die kürzeste Route ist

H E C B A D F G I H mit Länge 13.

Bei genauerer Betrachtung des Graphen sieht man, dass wir doch nicht so massive Gewalt angewandet haben. Außer bei B und I haben wir nämlich immer die zwei Kanten mit niedrigstem Gewicht gewählt, die an einem Punkt beginnen.

10) Wir finden einen aufspannenden Baum, für den das Maximum seiner Kosten minimal ist (d.h. das größte Kantengewicht soll möglichst klein sein) indem wir einen minimalen aufspannenden Baum finden (etwa mit Kruskal). Warum ist das so? Im Beweis des Satzes zum Algorithmus von Kruskal haben wir gezeigt, dass wir einen aufspannenden Baum in einen minimalen verwandeln können, indem wir sukzessive Kanten durch Kanten mit kleinerem Gewicht ersetzen. Somit hat der minimale aufspannende

Baum ein geringeres (oder zumindest kein größeres) maximales Kantengewicht (=Kosten) als der ursprüngliche aufspannende Baum.
Also ist das Maximum der Kosten eines minimalen aufspannenden Baumes kleiner gleich dem Maximum der Kosten eines beliebigen aufspannenden Baumes desselben Graphen.