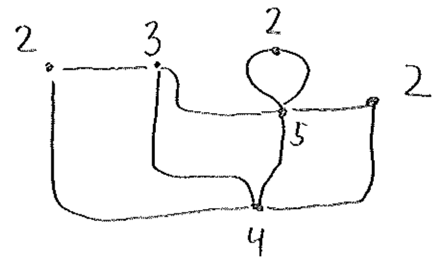
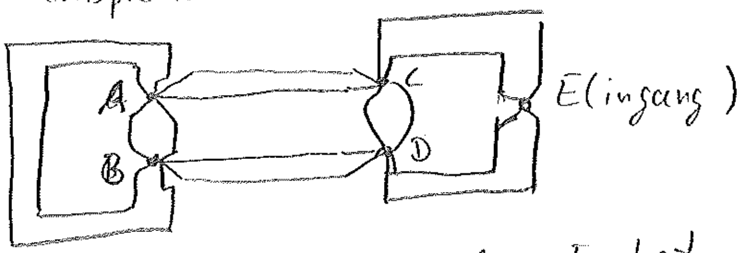
Übungsblatt Dienstag

1) Wir zeichnen den entsprechenden Graphen und bestimmen die Eckengrade:



Aus der Vorlesung wissen wir, dass für einen Rundgang alle Ecken geraden Grad haben müssen.
Wir können aber einen beschreiten der bei der Ecke mit Grad 3 beginnt und bei der mit Grad 5 endet (oder umgekehrt.)

2) Der entsprechende Graph ist:

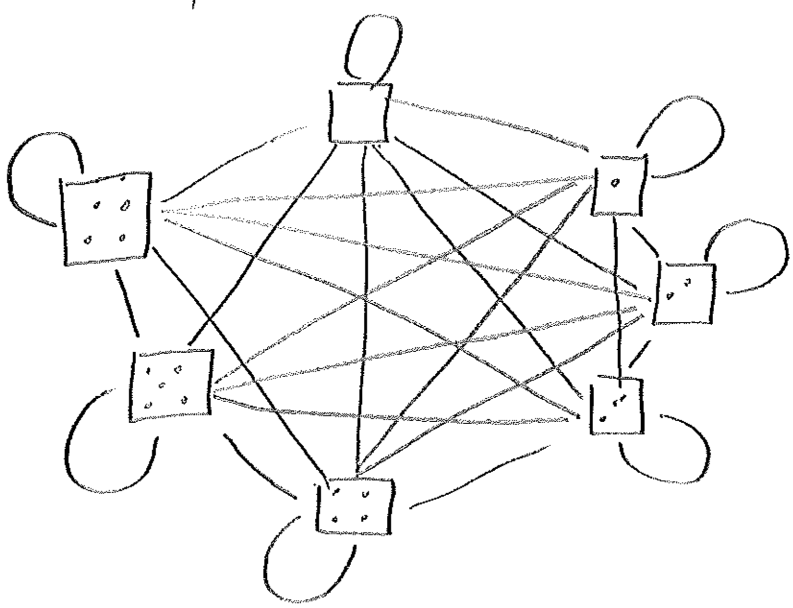


A, B, C, D haben Grad 6, E hat Grad 4
Damit existiert ein solcher Rundgang, z.B der hier:

- Vom Eingang aus einmal ganz außen rum
- Von E nach B über C und A jeweils die innere Wand
- Von B nach A und auf der anderen Seite zurück
- Von B nach D
- Von D nach C und auf der anderen Seite zurück.
- Von D zurück zum Eingang.

Im übrigen existiert der gewünschte Rundgang immer, falls es an Innen- und Außenwänden Sehenswertes gibt.

3) Der Graph:



Alle Ecken haben Grad 8. Die gewünschte Kette von Steinen gibt es also.

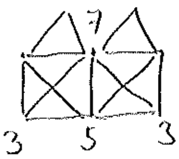
Bem.: • Die Schlingen im Graph ( ) stehen für den Dominostein mit zwei gleichen Werten (z.B.). Da 2 Kanten mit der Ecke verbunden sind, trägt sie den Wert 2 zum Grad der Ecke bei

• Warum gibt es 28 Steine?

7 Steine mit 2 gleichen Werten $+ 21 = \frac{7 \cdot 6}{2}$ Steine $= 28$

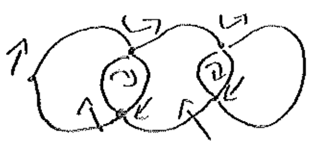
(Bei den verschiedenwertigen Steinen haben wir 7 Mögl. für die 1. Position, 6 für die 2. Position, und da uns die Reihenfolge egal müssen wir noch durch 2 dividieren)

4) a)

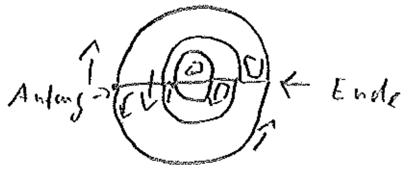


Da 4 Ecken ungeraden Grad haben, muss man zum Zeichnen dieser Figur den Stift absetzen.

b)

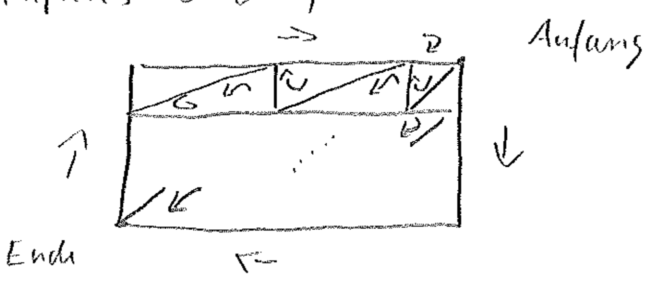


c)



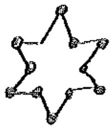
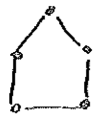
d) Äußeres 5-Eck, dann Pentagramm

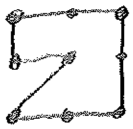
e)

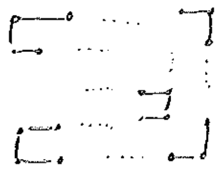


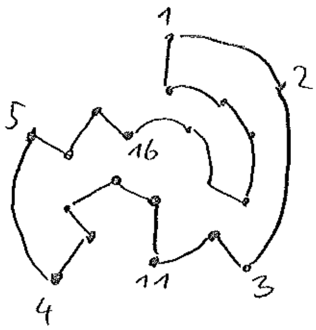
5) Wähle einen Weg von einer der Ecken mit ungeradem Grad zu einer anderen solchen Ecke. Das ist unsere 1. Linie.
Was noch übrig bleibt ist ein Graph mit 2 Ecken von ungeradem Grad und Ecken mit geradem Grad. Nach Vorlesung können wir diesen Restgraphen mit der 2. Linie zeichne.
z.B kann man also den Graphen aus 4a) mit 2 Linien zeichnen.

6) keinen hamiltonschen Rundweg haben b), e) und g)

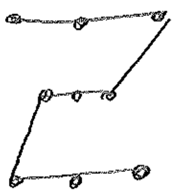
a)  , c)  , d)  , f) 

7) a) 

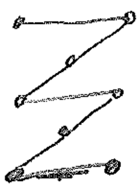
b) 

c) 

8) a) Hamilton-Weg:



Hamilton-Rundweg H:
Es muss ab, de, gh ∈ H gelten
(b, e, h haben Grad 2)
Damit müssen auch ag, ad, gd im Hamilton-Rundweg sein. Widerspruch.

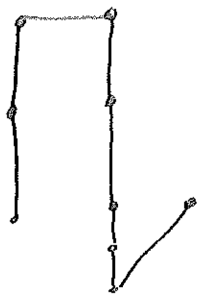
b) 

Da a und b Grad 2 haben muss ab, ac, cd, bd ∈ H gelten. Widerspruch

c) 

Von den 3 Kanten ba, bc, bf müssen genau 2 in H vorkommen.
1. Fall bf ∉ H
Da ac ∈ H den Rundweg a-b-c erzeugen würde muss ac ∉ H gelten. Damit aber cd, ad ∈ H. Widerspruch
2. Fall ba ∉ H (bc ∉ H ist analog)
Dann fl ∈ H, denn sonst wäre n-k-l-m-n ∈ H.
Damit ist aber i-e-g-h-i ∈ H
Widerspruch

d) Hamilton-Weg

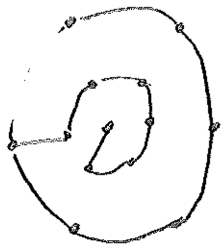


Hamilton-Rundweg H.

Es muss $ac, ab, hf, hi \in H$ gelten

Auf dem Weg von c nach f können wir entweder über e oder d gehen. Allerdings können dann die andere Ecke nicht mehr besuchen. Widerspruch.

e)



Wir betrachten m und nehmen an $mg \notin H$ ($mk, mj \notin H$ sind analog)

Fall 1: $kl \in H$

$\Rightarrow kj \notin H, ke \notin H$

$\Rightarrow ij, jd \in H, ef, ed \in H$

$\Rightarrow ic, bc \in H \Rightarrow$ 3 Kanten bei i

Widerspruch.

Die Fälle $kj \notin H$ und $ke \notin H$ führen analog zu Fall 1 zu einem Widerspruch

9) a) Spieler 1 gibt 4 Kanten eines Wegs vor, ohne dabei ein n-Eck zu erzeugen. Spieler 2 versucht diesen Weg zu einem Hamilton-Rundweg zu ergänzen.

b) Ausprobieren!