

Fourier-Transformation und Wavelets

Otto Forster, Joachim Wehler

Vorlesung im Wintersemester 2000/2001, LMU München,

Version 1.0

1	HILBERT-RÄUME	6
1.1	DEFINITION (PRÄ-HILBERT-RAUM)	6
1.2	SATZ (UNGLEICHUNG VON CAUCHY-SCHWARZ)	6
1.3	DEFINITION (HILBERT-RAUM)	7
1.4	DEFINITION (LINEARER OPERATOR)	7
1.5	BEMERKUNG (STETIGKEIT UND BESCHRÄNKTHEIT)	7
1.6	DEFINITION (ORTHOGONALITÄT, ORTHONORMALITÄT).....	8
1.7	DEFINITION (FOURIER-KOEFFIZIENTEN BZGL. EINES ORTHONORMAL-SYSTEMS)	8
1.8	SATZ (BESTE APPROXIMATION DURCH EIN ORTHONORMAL-SYSTEM)	8
1.9	KOROLLAR (BESSEL-UNGLEICHUNG, PARSEVAL-GLEICHUNG)	10
1.10	DEFINITION (HILBERT-BASIS).....	10
2	L²-RÄUME	11
2.1	SATZ (HILBERT-RAUM DER QUADRAT-SUMMIERBAREN FOLGEN)	11
2.2	BEMERKUNG (BANACH-RAUM DER P-SUMMIERBAREN FOLGEN)	12
2.3	BEMERKUNG (ABSOLUTE KONVERGENZ DURCH Z-INDIZIERTER REIHEN).....	12
2.4	ALGORITHMUS (SCHMIDTSCHES ORTHONORMALISIERUNGSVERFAHREN)	13
2.5	BEZEICHNUNG (RÄUME INTEGRIERBARER FUNKTIONEN)	14
2.6	BEISPIEL (LEGENDRE POLYNOME)	15
2.7	BEMERKUNG (LEGENDRE POLYNOME).....	16
2.8	DEFINITION (HAAR'SCHE FUNKTIONEN)	16
2.9	SATZ (HILBERT-BASIS DER HAAR'SCHEN FUNKTIONEN)	17
3	FOURIER-REIHEN	20
3.1	DEFINITION (TRIGONOMETRISCHES POLYNOM).....	20
3.2	BEMERKUNG (ORTHONORMAL-SYSTEM DER TRIGONOMETRISCHEN MONOME).....	20
3.3	DEFINITION (FOURIER-REIHE)	21
3.4	LEMMA (VERHALTEN BZGL. TRANSLATION UND DIFFERENTIATION)	21
3.5	DEFINITION (STÜCKWEISE STETIGE DIFFERENZIERBARKEIT)	22
3.6	DEFINITION (DIRICHLET-KERN)	22
3.7	LEMMA (DIRICHLET-KERN)	22
3.8	SATZ (RIEMANN-LEBESGUE LEMMA).....	23
3.9	SATZ (GLEICHMÄßIGE KONVERGENZ DER FOURIER-REIHE UNTER DIFFERENZIERBARKEITS- VORAUSSETZUNGEN)	24
3.10	KOROLLAR (WEIERSTRAB'SCHER APPROXIMATIONSSATZ, PERIODISCHER FALL).....	26
3.11	KOROLLAR (HILBERT-BASIS DER TRIGONOMETRISCHEN MONOME).....	26
3.12	KOROLLAR (WEIERSTRAB'SCHER APPROXIMATIONSSATZ)	27
3.13	KOROLLAR (HILBERT-BASIS DER LEGENDRE-POLYNOME).....	27
3.14	BEMERKUNG (FALTUNG, DISTRIBUTION)	27
3.15	SATZ (DIFFERENZIERBARKEIT UND KONVERGENZVERHALTEN)	28
4	FOURIER-INTEGRALE	30
4.1	DEFINITION (EXPONENTIALFUNKTION UND SKALIERUNG)	30
4.2	DEFINITION (FOURIER-TRANSFORMATION)	30
4.3	BEMERKUNG (FOURIER-TRANSFORMATION UND KOMPLEXE KONJUGATION)	30
4.4	BEISPIEL (FOURIER-TRANSFORMATION DER NORMALVERTEILUNG)	31
4.5	LEMMA (STETIGKEIT DER FOURIER-TRANSFORMATION)	32
4.6	BEISPIEL (NICHT INTEGRIERBARE FOURIER-TRANSFORMATION).....	33
4.7	LEMMA (TRANSLATION UND DILATATION BEI FOURIER-TRANSFORMATION)	33
4.8	LEMMA	34
4.9	DEFINITION (TEMPERIERTE FUNKTIONEN).....	34
4.10	BEMERKUNG	35
4.11	LEMMA (PRODUKT UND DIFFERENTIATION TEMPERIERTER FUNKTIONEN)	35
4.12	BEMERKUNG	36
4.13	SATZ (FOURIER-TRANSFORMATION TEMPERIERTER FUNKTIONEN)	36
4.14	LEMMA (STETIGKEIT DER FOURIER-TRANSFORMATION)	37
4.15	SATZ (UMKEHRFORMEL DER FOURIER-TRANSFORMATION)	38
4.16	KOROLLAR (FOURIER-TRANSFORMATION ALS ISOMETRIE)	40
4.17	SATZ (FOURIER-TRANSFORMATION ALS L ² -ISOMORPHISMUS)	40

5	DISTRIBUTIONEN	42
5.1	DEFINITION (TESTFUNKTIONEN).....	42
5.2	DEFINITION (DIRAC-DISTRIBUTION).....	42
5.3	DEFINITION (REGULÄRE DISTRIBUTIONEN).....	43
5.4	SATZ (APPROXIMATION DER DIRAC-DISTRIBUTION).....	43
5.5	DEFINITION (DISTRIBUTION).....	43
5.6	BEMERKUNG.....	43
5.7	DEFINITION (MULTIPLIKATION MIT FUNKTIONEN).....	44
5.8	DEFINITION (TRANSLATION UND DILATION EINER DISTRIBUTION).....	44
5.9	DEFINITION (ABLEITUNG EINER DISTRIBUTION).....	44
5.10	BEISPIEL (ABLEITUNG DER HEAVISIDE-DISTRIBUTION).....	45
5.11	DEFINITION (KONVERGENZ VON DISTRIBUTIONEN).....	45
5.12	BEISPIEL.....	45
6	FOURIER-TRANSFORMATION TEMPERIERTER DISTRIBUTIONEN	46
6.1	SATZ (TESTFUNKTIONEN UND TEMPERIERTE FUNKTIONEN).....	46
6.2	BEMERKUNG.....	47
6.3	DEFINITION (TEMPERIERTE DISTRIBUTION).....	47
6.4	SATZ (TEMPERIERTE DISTRIBUTION).....	47
6.5	BEMERKUNG (TEMPERIERTE DISTRIBUTIONEN).....	47
6.6	DEFINITION (FOURIER-TRANSFORMATION TEMPERIERTER DISTRIBUTIONEN).....	48
6.7	LEMMA (FOURIER-TRANSFORMATION DER DIRAC-DISTRIBUTION).....	48
6.8	LEMMA (TRANSLATION UND DILATATION BEI FOURIER-TRANSFORMATION TEMPERIERTER DISTRIBUTIONEN).....	49
6.9	SATZ (KONVERGENZ DER DIRICHLET-KERNE).....	49
6.10	FOLGERUNG (POISSON FORMEL).....	49
6.11	BEISPIEL (TRANSFORMATIONSFORMEL DER THETA-FUNKTION).....	50
7	FALTUNG	52
7.1	BEMERKUNG (INTEGRIERBARKEIT IM PRODUKTRAUM).....	52
7.2	DEFINITION (FALTUNG).....	52
7.3	SATZ (FOURIER-TRANSFORMATION DER FALTUNG VON FUNKTIONEN).....	53
7.4	DEFINITION (FALTUNG EINER DISTRIBUTION).....	54
7.5	BEMERKUNG (FALTUNG EINER DISTRIBUTION).....	54
7.6	LEMMA (FALTUNG EINER REGULÄREN DISTRIBUTION).....	54
7.7	LEMMA (FALTUNG EINER DISTRIBUTION).....	55
7.8	BEISPIEL (FALTUNG DER DIRAC-DISTRIBUTION).....	55
7.9	SATZ (FOURIER-TRANSFORMATION DER FALTUNG MIT EINER DISTRIBUTION).....	55
7.10	SATZ (ABTAST-THEOREM VON SHANNON).....	56
7.11	BEMERKUNG (ABTASTDISTANZ).....	57
7.12	BEMERKUNG (ABTASTUNG).....	58
8	KONTINUIERLICHE WAVELET-TRANSFORMATION	60
8.1	ALGORITHMUS (GEFENSTERTE FOURIER-TRANSFORMATION).....	60
8.2	ALGORITHMUS (WAVELET-TRANSFORMATION).....	60
8.3	BEMERKUNG (GEFENSTERTE FOURIER-TRANSFORMATION VERSUS WAVELET-TRANSFORMATION).....	61
8.4	SCHREIBWEISE (WAVELET).....	61
8.5	DEFINITION (WAVELET UND WAVELET-TRANSFORMATION).....	62
8.6	LEMMA (WAVELET-TRANSFORMATION ALS FALTUNG).....	62
8.7	BEISPIEL (HAAR WAVELET).....	63
8.8	BEMERKUNG (WAVELET).....	64
8.9	LEMMA (ERZEUGUNG VON WAVELETS).....	64
8.10	BEISPIEL (WAVELET MEXIKANER-HUT).....	65
8.11	SATZ (WAVELET-TRANSFORMATION ALS ISOMETRIE).....	65
8.12	SATZ (UMKEHRFORMEL DER WAVELET-TRANSFORMATION).....	66
9	GIBBSCHES PHÄNOMEN	68
10	SCHNELLE FOURIER-TRANSFORMATION	69

11	FOURIERTHEORIE UND QUANTENCOMPUTING.....	70
12	BILDKOMPRESSION	71
13	WAVELET-FRAME.....	72
13.1	DEFINITION (SKALIERUNGS- UND TRANSLATIONSPARAMETERN)	72
13.2	BEMERKUNG (ANFORDERUNG AN DIE DISKRETE WAVELET-TRANSFORMATION)	73
13.3	BEISPIEL (HAAR WAVELET)	73
13.4	DEFINITION (FRAME).....	74
13.5	BEMERKUNG (FRAME)	74
13.6	LEMMA (NORM IN EINEM HILBERT-RAUM)	75
13.7	SATZ (FRAME-OPERATOR)	75
13.8	DEFINITION (WAVELET-FRAME)	78
13.9	LEMMA (STRAFFER FRAME UND HILBERT-BASIS).....	78
13.10	SATZ (WAVELET-FRAME)	79
13.11	DEFINITION (MEYER-WAVELET)	85
13.12	BEMERKUNG (MEYER-WAVELET)	85
13.13	SATZ (MEYER-WAVELET).....	86
13.14	SATZ (REKONSTRUKTION AUS DEN WAVELET-KOEFFIZIENTEN).....	87
13.15	BEMERKUNG (MEXIKANER-HUT).....	89
14	MULTI-SKALEN-ANALYSE	90
14.1	BEISPIEL (SKALIERUNGSFUNKTION)	90
14.2	DEFINITION (SKALIERUNGSFUNKTION).....	91
14.3	LEMMA (ORTHOGONALITÄTSRELATION)	91
14.4	BEMERKUNG (UNTERRAUM-STRUKTUR ZU EINER SKALIERUNGSFUNKTION).....	92
14.5	SATZ (MULTI-SKALEN-ANALYSE).....	93
14.6	SATZ (WAVELETS EINER MULTI-SKALEN-ANALYSE)	97
14.7	BEMERKUNG (WAVELETS EINER MULTI-SKALEN-ANALYSE)	99
14.8	LEMMA (SKALIERUNG IM FREQUENZRAUM).....	100
14.9	SATZ (KONSTRUKTION VON SKALIERUNGSFUNKTIONEN).....	103
14.10	SATZ (EXTREMALPUNKT)	104
14.11	BEISPIEL (DAUBECHIES-WAVELETS IM ÜBERBLICK)	104
15	SCHNELLE WAVELET-TRANSFORMATION	107
15.1	BEZEICHNUNG (SKALIERUNGSFUNKTION UND WAVELET).....	107
15.2	DEFINITION (ZERLEGUNGS-OPERATOREN)	107
15.3	BEMERKUNG	108
15.4	ALGORITHMUS (SCHNELLE WAVELET-ANALYSE)	108
15.5	ALGORITHMUS (SCHNELLE WAVELET-SYNTHESE).....	110
15.6	BEMERKUNG (KOMPLEXITÄT).....	111
16	ZUSAMMENFASSUNG.....	112
17	LITERATUR	114

Einleitung

Fourier-Transformation ist die klassische Methode zur Zerlegung eines Signals in seine einzelnen Frequenzen und die anschließende Rekonstruktion aus dem Frequenzspektrum. Die Fourier-Transformation spielt eine wichtige Rolle in vielen Gebieten der Mathematik, der Physik und in ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen. Für letztere ist insbesondere die "Schnelle Fourier-Transformation", eine effiziente numerische Implementierung, wichtig. Auch bei den Algorithmen des Quanten-Computing ist die schnelle Fourier-Transformation ein entscheidendes Hilfsmittel.

Daneben ist der Fourier-Transformation in der Praxis ein Konkurrent erwachsen in der Wavelet-Transformation. Wavelets liefern ein mathematisches Verfahren, das aufgrund der zeitlichen Lokalisierung des Frequenzspektrums eine bessere Auflösung bei der Rekonstruktion des Signals ergibt. Hierzu werden die Signale mit zeitlich lokalisierten "kleinen Wellen" (Wavelets) gescannt, statt mit den unendlich ausgedehnten Sinus- oder Cosinusschwingungen der Fourier-Transformation.

Die Vorlesung gibt eine Einführung in die Mathematik beider Arten von Transformationen. Aus theoretischer Sicht beurteilt hat das moderne Gebiet der Wavelet-Theorie die klassische Fourier-Theorie keinesfalls abgelöst. Vielmehr setzen Wavelet-Transformationen die theoretischen Eigenschaften der Fourier-Transformation einschließlich ihrer Anwendung auf Distributionen als selbstverständliche Hilfsmittel voraus.

Das vorliegende Script gibt den Stoff wieder, den wir in einer 4-stündigen Vorlesung behandelt haben. An Vorwissen haben wir bei unseren Hörern gute Kenntnisse in der Analysis vorausgesetzt. Es ist geplant, auch den Inhalt der Kapitel 9, 10, 11, 12 unter einem separaten Link auf der Homepage von O. Forster bereitzustellen.

München, April 2001

1 Hilbert-Räume

Integrierbare Funktionen bilden bezüglich der Addition und der Multiplikation mit Skalaren einen komplexen Vektorraum. Seine Dimension ist i.a. nicht mehr endlich. Zum Studium unendlich-dimensionaler Vektorräume verwendet man neben der Linearen Algebra zusätzlich Hilfsmittel aus der Topologie. Mit Hilfe einer oder mehrerer Normen führt man einen Konvergenzbegriff ein. Die einfachste Klasse von unendlich-dimensionalen Vektorräumen dieser Art sind Hilbert-Räume. Bei ihnen leitet sich die Norm aus einem Hermitesches Skalarprodukt ab. Damit ist in Hilbert-Räumen nicht nur die Länge eines Vektors definiert, sondern auch der Winkel zwischen zwei beliebigen Vektoren. Insbesondere hat man einen Orthogonalitäts-Begriff.

So lange nichts anderes gesagt wird, werden wir in dieser Vorlesung Vektorräume stets als komplexe Vektorräume voraussetzen.

1.1 Definition (Prä-Hilbert-Raum)

Ein *Prä-Hilbert-Raum* ist ein komplexer Vektorraum X zusammen mit einem Hermiteschen Skalarprodukt

$$\langle -, - \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{C}.$$

Ein Hermitesches Skalarprodukt erfüllt die Bedingungen:

- $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$
- $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ und es gilt

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (positiv definit).}$$

Das Skalarprodukt ist also linear in der ersten und antilinear in der zweiten Komponente.

Die wichtigste Aussage über das Skalarprodukt ist die Abschätzung von Cauchy-Schwarz:

1.2 Satz (Ungleichung von Cauchy-Schwarz)

In einem Prä-Hilbert-Raum X gilt für das Skalarprodukt zweier Elemente $x, y \in X$ die Abschätzung von Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Beweis. Wir betrachten für einen Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ das Skalarprodukt

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle$$

Falls $\langle y, y \rangle \neq 0$ setzen wir $\lambda := -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ und erhalten

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}$$

d.h.

$$\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \geq |\langle x, y \rangle|^2.$$

Falls $\langle y, y \rangle = 0$ folgt $y = 0$, und die Behauptung gilt offensichtlich, QED.

1.3 Definition (Hilbert-Raum)

Ein Prä-Hilbert-Raum $(X, \langle -, - \rangle)$ heißt *Hilbert-Raum*, wenn der Vektorraum X bzgl. der induzierten Norm

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

vollständig ist, d.h. wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

Dabei folgt die Dreiecksungleichung aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung.

1.4 Definition (Linearer Operator)

Ein *linearer Operator* zwischen zwei Hilbert-Räumen

$$(X_1, \langle -, - \rangle_1) \rightarrow (X_2, \langle -, - \rangle_2)$$

ist eine \mathbb{C} -lineare Abbildung

$$f: X_1 \rightarrow X_2.$$

Der Operator heißt *isometrisch*, wenn er das Skalarprodukt respektiert, d.h. wenn gilt

$$\langle f(x), f(y) \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1.$$

Ein surjektiver isometrischer Operator heißt *unitär*.

1.5 Bemerkung (Stetigkeit und Beschränktheit)

Anders als im Falle endlich-dimensionaler Vektorräume sind lineare Operatoren

$$f: X \rightarrow Y$$

i.a. nicht *beschränkt*, d.h. es braucht keine Konstante K zu geben mit

$$\|f(x)\| \leq K \|x\| \text{ für alle } x \in X.$$

Ein linearer Operator ist genau dann beschränkt, wenn

$$\sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| < \infty.$$

Man nennt dann

$$\|f\| := \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$$

die *Operator-Norm* von f . Die Beschränktheit ist gleichwertig mit der Stetigkeit des Operators.

Analog zu Definition 1.1 lassen sich auch reelle Hilbert-Räume definieren. Bei ihnen ist der unterliegende Vektorraum euklidisch, und man betrachtet dann \mathbf{R} -lineare Abbildungen.

Da man in einem Hilbert-Raum über das Skalarprodukt Winkel messen kann, läßt sich auch der Begriff der Orthogonalität einführen. Er verschafft den Begriff der linearen Unabhängigkeit.

1.6 Definition (Orthogonalität, Orthonormalität)

Eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen eines Hilbert-Raumes X heißt ein *Orthogonal-System*, wenn alle Elemente paarweise aufeinander senkrecht stehen, d.h. für alle $i \neq j \in I$ gilt

$$\langle x_i, x_j \rangle = 0.$$

Die Familie $(x_i)_{i \in I}$ heißt *Orthonormal-System*, wenn zusätzlich alle Elemente auf die Länge 1 normiert sind, d.h. für alle $i, j \in I$ gilt

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}.$$

1.7 Definition (Fourier-Koeffizienten bzgl. eines Orthonormal-Systems)

In einem Hilbert-Raum X sind die *Fourier-Koeffizienten* eines Elementes $x \in X$ bzgl. eines Orthonormal-Systems $(x_i)_{i \in I}$ definiert als die Familie der Skalarprodukte

$$\left(\langle x, x_i \rangle \right)_{i \in I}.$$

Die Fourier-Koeffizienten erlauben, jedes Element des Hilbert-Raumes nach einem Orthonormal-System zu entwickeln. Der folgende Satz zeigt, daß die endlichen Teilsummen dieser Entwicklung die beste Approximation von x liefern.

1.8 Satz (Beste Approximation durch ein Orthonormal-System)

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ ein endliches Orthonormal-System in einem (Prä-)Hilbert-Raum X und sei $x \in X$ ein beliebiger Vektor. Es seien

$$\gamma_i := \langle x, e_i \rangle \in \mathbf{C} \text{ für } i = 1, \dots, n$$

die Fourier-Koeffizienten von x . Dann gilt für jede Wahl von Koeffizienten

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{C}^n$$

die Abschätzung

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| \geq \left\| x - \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i \right\|.$$

Die Approximation mit den Fourier-Koeffizienten liefert die Differenz

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2.$$

Beweis. Anschaulich gesprochen handelt es sich um die beste Approximation von x durch einen geeigneten Vektor in dem von $\{e_1, \dots, e_n\}$ aufgespannten Unterraum

$$E := \text{span} \langle \{e_1, \dots, e_n\} \rangle.$$

Der Vektor

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i e_i$$

ist die Orthogonalprojektion von x auf E , während

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

ein beliebiger Vektor von E ist. Für das Skalarprodukt gilt die Formel von Pythagoras

$$\|a + b\|^2 = \langle a + b, a + b \rangle = \langle a, a \rangle + \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle + \langle b, b \rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle a, b \rangle,$$

im Falle des Senkrecht-Stehens $a \perp b$ also

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Diese Formel überträgt sich auf endlich viele Summanden. Man erhält in der Situation des Satzes:

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\|^2 &= \left\| \left(x - \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i e_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right) \right\|^2 = \\ &\left\| x - \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i \right\|^2 + \sum_{i=1}^n |\gamma_i - \alpha_i|^2 \geq \left\| x - \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i \right\|^2. \end{aligned}$$

Eine weitere Anwendung der Formel von Pythagoras zeigt

$$\|x\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i + \left(x - \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i \right) \right\|^2 = \sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2 + \left\| x - \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i \right\|^2, \text{ QED.}$$

1.9 Korollar (Bessel-Ungleichung, Parseval-Gleichung)

Es sei $(e_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem eines (Prä-)Hilbert-Raumes X mit abzählbarer Indexmenge I . Dann gilt für jedes Element $x \in X$:

- $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (Bessel-Ungleichung)
- $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2$ (Parseval-Gleichung) $\Leftrightarrow x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ (Fourier-Entwicklung)

Beweis. Die Gleichung von Satz 1.8 zeigt, daß für jede endliche Teilfamilie $J \subset I$ gilt

$$\sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Da die rechte Seite unabhängig von J ist, konvergiert die Reihe der Absolutbeträge. Die Ungleichung gilt auch im Limes und stellt die Bessel-Ungleichung dar.

Ebenso ergibt die Gleichung von Satz 1.8 im Grenzwert die Äquivalenz der Parseval-Gleichung mit der Fourier-Entwicklung, QED.

Dieselbe Bedeutung, die für die endlich-dimensionale Theorie der Begriff der Basis hat, kommt in Hilbert-Räumen dem Begriff der Hilbert-Basis zu. In endlich-dimensionalen Räumen fallen beide Begriffe zusammen, im unendlich-dimensionalen Fall sind sie dagegen verschieden. Hier tritt der Begriff der Basis in seiner Bedeutung zurück, es wird fast ausschließlich mit dem Begriff der Hilbert-Basis gearbeitet. Jede Hilbert-Basis ist auch linear-unabhängig. Sie erzeugt jedoch die Elemente des Hilbert-Raumes i.a. nicht mehr als endliche Linearkombinationen, sondern nur als unendliche Reihen.

1.10 Definition (Hilbert-Basis)

Ein abzählbares Orthonormalsystem $(e_i)_{i \in I}$ von Elementen eines Hilbert-Raumes X heißt *Hilbert-Basis*, wenn es vollständig ist, d.h. wenn jedes Element $x \in X$ die Fourier-Entwicklung hat

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Der Hilbert-Raum X heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare Hilbert-Basis hat.

2 L²-Räume

Im folgenden werden wir nur separable Hilbert-Räume betrachten. Die allgemeinere Theorie von Hilbert-Räumen mit überabzählbarer Hilbert-Basis wird in dieser Vorlesung nicht behandelt. Alle separablen Hilbert Räume sind untereinander isometrisch isomorph. Ein Standardrepräsentant ist der Raum $l^2 = l^2(\mathbb{N})$ der quadrat-summierbaren Folgen.

2.1 Satz (Hilbert-Raum der quadrat-summierbaren Folgen)

Der Prä-Hilbert-Raum $l^2 = l^2(\mathbb{N})$ der quadrat-summierbaren Folgen

$$\{ (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} |z_n|^2 < \infty \},$$

zusammen mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle := \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \bar{y}_n.$$

ist vollständig, also ein Hilbert-Raum. Die Familie $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \text{ mit der } i\text{-ten Komponente} = 1$$

ist eine Hilbert-Basis.

Beweis. Wir gehen aus von einer Cauchy-Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ von Elementen $x_\nu \in l^2$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert nach Voraussetzung ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|x_\nu - x_\mu\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_{\nu,n} - x_{\mu,n}|^2 \leq \varepsilon \text{ für alle } \nu, \mu \geq N.$$

Wegen der Vollständigkeit der komplexen Zahlen existiert für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ der Grenzwert

$$x_{\infty,n} := \lim_{\nu \rightarrow \infty} x_{\nu,n}.$$

Zu zeigen bleibt, daß hierdurch ein Element

$$x_\infty := (x_{\infty,n})_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$$

definiert wird und daß die Konvergenz sogar im l^2 -Sinne stattfindet.

Es gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\nu, \mu \geq N$

$$\sum_{n=0}^m |x_{\nu,n} - x_{\mu,n}|^2 \leq \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=0}^m |x_{\infty,n} - x_{\mu,n}|^2 \leq \varepsilon.$$

Damit existiert für $\mu \geq N$ der Grenzwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_{\infty,n} - x_{\mu,n}|^2 \leq \varepsilon.$$

Wir wählen ein $\mu \geq N$. Wegen

$$x_\infty - x_\mu \in l^2 \text{ und } x_\mu \in l^2$$

liegt auch die Summe beider Elemente im Vektorraum l^2

$$x_\infty = (x_\infty - x_\mu) + x_\mu \in l^2,$$

und obige Abschätzung

$$\|x_\infty - x_\mu\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_{\infty,n} - x_{\mu,n}|^2 \leq \varepsilon \text{ für } \mu \geq N$$

bedeutet die Konvergenz im l^2 -Sinne

$$x_\infty = \lim_{\mu \rightarrow \infty} x_\mu.$$

Daß die kanonischen Einheitsvektoren eine Hilbert-Basis bilden, folgt sofort aus der Parseval-schen Gleichung (Korollar 1.9), QED.

2.2 Bemerkung (Banach-Raum der p -summierbaren Folgen)

Allgemeiner definiert man für jedes reelle $p \geq 1$ den Vektorraum

$$l^p = l^p(N) := \{ (z_n)_{n \in N} \in \mathbb{C}^N : \sum_{n \in N} |z_n|^p < \infty \}$$

mit der Norm

$$\| (z_n)_{n \in N} \| := \sqrt[p]{\sum_{n \in N} |z_n|^p}.$$

Man zeigt, daß hierdurch ein normierter Vektorraum definiert wird, der sogar vollständig, d.h. ein Banach-Raum ist.

Es gilt $l^1 \subset l^2$ und allgemeiner

$$l^p \subset l^q \text{ für } p < q.$$

2.3 Bemerkung (Absolute Konvergenz durch Z -indizierter Reihen)

Eine durch eine abzählbare Menge I indizierte Reihe komplexer Zahlen

$$\sum_{n \in I} z_n$$

heißt *absolut-konvergent*, wenn die Folge der endlichen Partialsummen der Absolutbeträge in irgendeiner Anordnung konvergiert. In diesem Falle ist die Konvergenz unabhängig von der Anordnung. Im Falle der Indizierung durch die ganzen Zahlen $I = \mathbb{Z}$ werden wir im folgenden stets die Folge der symmetrischen Partialsummen

$$S_N := \sum_{n=-N}^N |z_n|$$

betrachten.

Analog zu Satz 2.1 zeigt man, daß der Vektorraum

$$l^2(\mathbf{Z}) := \{ (z_n)_{n \in \mathbf{Z}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{Z}} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |z_n|^2 < \infty \}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x_n)_{n \in \mathbf{Z}}, (y_n)_{n \in \mathbf{Z}} \rangle := \sum_{n \in \mathbf{Z}} x_n \bar{y}_n$$

ebenfalls ein Hilbert-Raum ist. Die Familie $(e_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ mit

$$e_i = (\dots, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \text{ mit der } i\text{-ten Komponente} = 1$$

ist eine Hilbert-Basis. Ähnlich definiert man den Hilbert-Raum

$$l^2(\mathbf{Z}^2) := \{ (z_{m,n})_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2} \in \mathbf{C}^{\mathbf{Z}^2} : \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2} |z_{m,n}|^2 < \infty \},$$

der bei der diskreten Wavelet-Transformation auftreten wird, und allgemeiner für eine beliebige abzählbare Menge I den Hilbert-Raum

$$l^2(I).$$

Alle Hilbert-Räume $l^2(I)$ sind untereinander isometrisch-isomorph, insbesondere kann man als einen Repräsentanten den Hilbert-Raum $l^2(\mathbf{N})$ wählen.

2.4 Algorithmus (Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren)

Der folgende Algorithmus transformiert eine linear-unabhängige Folge von Elementen eines Hilbert-Raumes X in ein Orthonormal-System:

Input. Linear-unabhängige Folge $(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$ von Elementen aus X .

Output. Orthonormal-System $(e_i)_{i \in \mathbf{N}}$ mit: Für alle $n \in \mathbf{N}$

$$\text{span} \langle e_i : i = 0, 1, \dots, n \rangle = \text{span} \langle x_i : i = 0, 1, \dots, n \rangle.$$

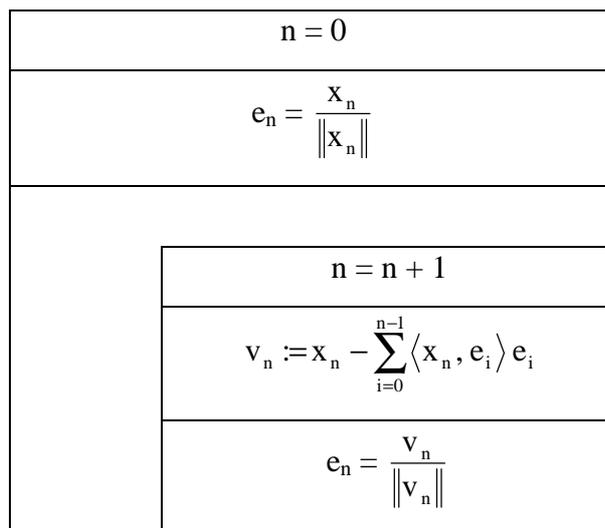


Abbildung 1 Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

Die kontinuierliche Version der Folgen-Räume l^2 sind die Funktionen-Räume L^2 aus quadrat-integrierbaren Funktionen. Sie bilden ebenfalls separable Hilbert-Räume. Daher sind l^2 und L^2 vom abstrakten Standpunkt aus betrachtet isomorph. Der Unterschied liegt jedoch in der Representation ihrer Elemente: Folgenräume führen in Kapitel 3 zur Theorie der Fourier-Reihen, die Representation mit Funktionen führt in Kapitel 4 zur Fourier'schen Integral-Transformation.

2.5 Bezeichnung (Räume integrierbarer Funktionen)

i) Wir bezeichnen mit $L^2 = L^2(\mathbf{R})$ den Vektorraum der Klassen von meßbaren Funktionen

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$$

mit

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt < \infty,$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{R}} f(t) \bar{g}(t) dt.$$

Bei der Bildung von Äquivalenzklassen werden zwei Funktionen identifiziert, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden. Man beweist in der Integrationstheorie, daß L^2 vollständig, also ein Hilbert-Raum ist ([For1983], §10, Satz 4).

ii) Allgemeiner sei $I \subset \mathbf{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und

$$\mu: I \rightarrow \mathbf{R}_+^*$$

eine meßbare Funktion. Dann bezeichnet $L^2(I, \mu(t) dt)$ den Vektor-Raum der Klassen meßbarer Funktionen

$$f: I \rightarrow \mathbf{C}$$

mit

$$\int_I |f(t)|^2 \mu(t) dt < \infty,$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_R f(t) \overline{g(t)} \mu(t) dt.$$

iii) Analog zu Bemerkung 2.2 definiert man für reelle $p \geq 1$ die Vektor-Räume

$$L^p(I, \mu(t)dt)$$

von Funktionenklassen. Man zeigt, daß sie vollständig, also Banach-Räume sind (für das Standard-Maß $\mu \equiv 1$ siehe [For1983], §10, Satz 4).

2.6 Beispiel (Legendre Polynome)

Die Legendre-Polynome

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} D^n [(x^2 - 1)^n], \quad n \in \mathbb{N},$$

$$D^n := \frac{d^n}{dx^n} \text{ Differentialoperator,}$$

bilden ein Orthogonal-System von $L^2([-1, 1])$. Die ersten Legendre-Polynome sind

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

Beweis. i) Wir beweisen für die Funktionen

$$g_{k,m} := D^k [(x^2 - 1)^m]$$

durch Induktion über k die Hilfsaussage: Für $k < m$ gilt

$$g_{k,m} = (x^2 - 1)^{m-k} \Phi(x) \text{ mit einem Polynom } \Phi.$$

Offensichtlich gilt die Aussage für $k = 0$ mit $\Phi = 1$. Zum Beweis des Induktionsschrittes berechnen wir

$$g_{k+1,m} = D g_{k,m}(x) = (m-k)(x^2 - 1)^{m-(k+1)} 2x \Phi(x) + (x^2 - 1)^{m-k} \Phi'(x) =$$

$$(x^2 - 1)^{m-(k+1)} [2x(m-k)\Phi(x) + (x^2 - 1)\Phi'(x)]$$

ii) Sei $n > m$. Wir berechnen mit partieller Integration

$$\int_{-1}^1 g_{n,n}(x) g_{m,m}(x) dx = [g_{n-1,n} g_{m,m}]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 g_{n-1,n}(x) g_{m+1,m}(x) dx.$$

Aufgrund der in Teil i) bewiesenen Formel verschwindet der erste Summand an den Randstellen $x = 1$ und $x = -1$. Auf das Integral des zweiten Summanden wenden wir sukzessive weitere partielle Integrationen an und erhalten schließlich

$$\int_{-1}^1 g_{n,n}(x) g_{m,m}(x) dx = (-1)^n \int_{-1}^1 g_{0,n}(x) g_{m+n,m}(x) dx = 0,$$

da wegen $n > m$ auch

$$m + n > 2m,$$

also

$$g_{m+n,m} := D^{m+n} [(x^2 - 1)^m] = 0, \text{ QED.}$$

2.7 Bemerkung (Legendre Polynome)

Die Legendre Polynome sind durch folgende beide Bedingungen charakterisiert:

- Das n -te Legendre-Polynom ist ein Polynom vom Grad n , das in $L^2([-1, 1])$ auf allen Polynomen vom Grad $\leq n - 1$ senkrecht steht.
- Es gilt $P_n(1) = 1$.

Die zweite Bedingung rechnet man nach. Daß durch beide Bedingungen eindeutig ein Polynom bestimmt wird, folgt daraus, daß die Monome

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

in $L^2([-1, 1])$ eine linear-unabhängige Familie bilden. Der Untervektorraum V_n , der von allen Monomen vom Grad $\leq n$ aufgespannt wird, hat die Dimension

$$\dim V_n = n + 1,$$

sein Unterraum V_{n-1} hat also die Codimension 1.

Die Legendre-Polynome haben bzgl. der Norm von $L^2([-1, 1])$ nicht die Länge 1. Es gilt vielmehr

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Nach Normierung auf die Länge 1 bilden die normierten Legendre-Polynome sogar ein vollständiges Orthonormal-System, d.h. eine Hilbert-Basis von $L^2([-1, 1])$. Wir werden diese Aussage in Kapitel 3 aus dem Weierstraß'schen Approximationssatz (Korollar 3.13) folgern.

Eine für die Wavelet-Theorie grundlegende Klasse von Funktionen sind die Haar'schen Funktionen.

2.8 Definition (Haar'sche Funktionen)

Aus der Funktion

$$\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow [-1, 1], \varphi(t) := \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

leitet man die skalierten und translatierten Funktionen

$$\varphi_{k,m} : \mathbf{R} \longrightarrow [-1, 1], \varphi_{k,m}(t) := \frac{1}{\sqrt{2^k}} \varphi\left(\frac{t}{2^k} - m\right), k, m \in \mathbf{Z},$$

ab. Sie bilden die Familie $(\varphi_{k,m})_{k,m \in \mathbf{Z}}$ der *Haar'schen-Funktionen*.

Der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2^k}}$ ist so gewählt, daß jede Haar'sche Funktion als Element von $L^2(\mathbf{R})$ auf die Länge 1 normiert ist.

2.9 Satz (Hilbert-Basis der Haar'schen Funktionen)

Die Familie der Haar'schen Funktionen $(\varphi_{k,m})_{(k,m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}}$ ist eine Hilbert-Basis des Hilbert-Raumes $L^2(\mathbf{R})$.

Beweis. i) Zwei Haar'sche Funktionen $\varphi_{k,m}$ zu festem Skalierungsparameter k aber unterschiedlichem Translationsparameter m , haben disjunkten Träger bis auf evtl. Randpunkte, sind also orthogonal zu einander. Für zwei Haar'sche Funktionen zu unterschiedlichem Skalierungsparameter m ist eine der beiden konstant auf dem Träger der anderen, also sind sie auch wieder orthogonal. Also bilden die Haar'schen Funktionen ein Orthogonal-System. Nach Wahl des Normierungsfaktors sind sie dann sogar ein Orthonormal-System.

ii) Zum Beweis der Vollständigkeit ist eine beliebige Funktion $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ zu approximieren.

Wir nehmen zunächst an, daß φ kompakten Träger hat, also o.E.

$$\varphi \in L^2([0, 1]).$$

Wir zeigen: Die gestauchten Haar'schen-Funktionen $(\varphi_{-k,m})$ zu den Indizes

$$(-k, m), k \in \mathbf{N}, 0 \leq m < 2^k,$$

also zu negativen Skalierungsparametern, approximieren zusammen mit der konstanten Funktion

$$\varphi_0 := 1 \in L^2([0, 1])$$

die vorgegebene Funktion φ .

Jede quadrat-integrierbare Funktion aus dem Raum $L^2([0, 1])$ läßt sich über dem kompakten Intervall $[0, 1]$ durch Treppenfunktionen, d.h. stückweise konstante Funktionen, bzgl. der L^2 -Norm approximieren. Hierbei kann man sich auf *dyadische* Treppenfunktionen beschränken, sie sind konstant jeweils auf den dyadischen Intervallen

$$I_{-k,m} := \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right], m \in \mathbb{N} \text{ und } 0 \leq m < 2^k.$$

Wir bezeichnen mit V_{-k} , $k \in \mathbb{N}$, den endlich-dimensionalen Vektorraum der dyadischen Treppenfunktionen zu den Konstanzintervallen der Länge $2^{-k} = \frac{1}{2^k}$

$$I_{-k,m}, 0 \leq m < 2^k.$$

Die Vektorräume bilden eine aufsteigende Folge

$$V_0 \subset V_{-1} \subset \dots \subset V_{-k} \subset V_{-(k+1)} \subset \dots$$

Es gilt die Dimensionsformel

$$\dim V_0 = 1, \dim V_{-1} = 2, \dots, \dim V_{-k} = 2^k.$$

Andererseits gilt für die Vektorräume der translatierten Haar'schen Funktionen zum Skalenfaktor k

$$W_{-k} := \text{span} \langle \varphi_{-k,m} : 0 \leq m < 2^k \rangle, k \in \mathbb{N}, \text{ und } W_{-1} := \mathcal{C} \varphi_0.$$

die Dimensionsformel

$$\dim W_{-k} = 2^k, k \in \mathbb{N}.$$

Offensichtlich gilt

$$W_{-(k+1)} \subset V_{-k}, k \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt die Gleichheit von Vektorräumen

$$\bigoplus_{i=1}^{k-1} W_{-i} = V_{-k}$$

aus der Abzählung ihrer Dimensionen

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{k-1} W_{-i} = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 1 + \frac{2^k - 1}{2 - 1} = 2^k = \dim V_{-k}.$$

Da sich jede Funktion aus $L^2([0, 1])$ durch Elemente aus den Vektorräumen V_{-k} approximieren läßt, läßt sie sich auch durch Elemente aus den Vektorräumen W_{-k} approximieren. Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

iii) Nun beweisen wir die Vollständigkeit für den allgemeinen Fall. Bekanntlich kann jede quadrat-integrierbare Funktion aus $L^2(\mathbf{R})$ durch quadrat-integrierbare Funktionen mit kompaktem Träger approximiert werden ([For1983], §10, Satz 3). Es genügt also, eine Funktion mit kompaktem Träger, o.E. mit Träger in $[0, 1]$, zu approximieren. Nach Teil ii) läßt sie sich durch die Haar'schen Funktionen und die konstante Funktion

$$\varphi_0 := 1$$

approximieren. Daher bleibt zu zeigen, daß φ_0 im Raum $L^2(\mathbf{R})$ durch die Haar'schen Funktionen approximiert werden kann. Hierfür verwenden wir die gestreckten Haar'schen Funktionen $\varphi_{k,m}$ zu positivem Skalierungsparameter $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$\delta_k : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, g_k(t) := \begin{cases} \frac{1}{2^k} & t \in [0, 2^k[\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für ihre L²-Norm gilt

$$\|\delta_k\|^2 = \int_0^{2^k} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 dt = \frac{1}{2^k},$$

sie bilden also eine Nullfolge. Durch Induktion über k zeigt man

$$\varphi_0 = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2^i}} \varphi_{i,0} + \delta_k$$

weil

$$\delta_k = \frac{1}{\sqrt{2^{k+1}}} \varphi_{k+1,0} + \delta_{k+1}.$$

Hieraus folgt im Grenzwert $k \rightarrow \infty$ die Behauptung, QED.

Die im Beweis von Satz 2.9 durchgeführte Approximation der konstanten Funktion durch Funktionen, die symmetrisch zur x-Achse sind, zeigt daß die Approximation bzgl. der L²-Norm der Anschauung widersprechen kann.

3 Fourier-Reihen

Wir verstehen in diesem Kapitel unter einer *periodischen integrierbaren* Funktion eine Funktion

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$$

mit der Periode 2π , d.h.

$$f(x + 2\pi) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbf{R},$$

deren Einschränkung auf das abgeschlossene Intervall $[-\pi, \pi]$ integrierbar ist im Sinne von Lebesgue. Periodische Funktionen

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$$

mit der Periode 2π entsprechen bijektiv den Funktionen

$$f : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{C}$$

auf dem Kreis

$$S^1 \cong \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}.$$

Das Hauptresultat dieses Kapitels ist die gleichmäßige Approximation einer periodischen, stetigen Funktion mit geeigneten Differenzierbarkeitseigenschaften durch ihre Fourier-Reihe. Aus diesem Ergebnis folgt eine Reihe bekannter Aussagen, unter anderem der Weierstraß'sche Approximationssatz.

3.1 Definition (Trigonometrisches Polynom)

Ein *trigonometrisches Polynom* N -ten Grades, $N \in \mathbf{N}$, ist eine Funktion der Gestalt

$$p_N : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, p_N(x) := \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \text{ mit komplexen Koeffizienten } c_n \in \mathbf{C}.$$

Spezielle trigonometrische Polynome sind die *trigonometrischen Monome*

$$e_n(x) = e^{inx}, n \in \mathbf{Z}.$$

3.2 Bemerkung (Orthonormal-System der trigonometrischen Monome)

Die trigonometrischen Monome bilden ein Orthonormal-System des Hilbert-Raumes

$$L^2\left([-\pi, \pi], \frac{dt}{2\pi}\right),$$

d.h. des Raumes $L^2([-\pi, \pi])$ der quadratintegrierbaren Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

3.3 Definition (Fourier-Reihe)

Die *Fourier-Reihe* einer periodischen integrierbaren Funktion f ist die formale Reihe

$$F[f] := \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n[f] e_n$$

trigonometrischer Polynome mit den *Fourier-Koeffizienten*

$$c_n[f] := \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \overline{e_n(t)}, n \in \mathbf{Z}.$$

Man nennt die endlichen Summen

$$F_N[f] := \sum_{|n| \leq N} c_n[f] e_n, N \in \mathbf{N}$$

die N -ten *Partialsommen* der Fourier-Reihe.

3.4 Lemma (Verhalten bzgl. Translation und Differentiation)

Es sei f eine periodische integrierbare Funktion und

$$F[f] := \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n[f] e_n$$

ihre Fourier-Reihe.

i) Wir bezeichnen mit f_a die mit dem Translationsoperator τ_a um den festen Wert a verschobene Funktion, d.h.

$$f_a := \tau_a(f) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}, \tau_a(f)(x) := f(x - a).$$

Für ihre Fourier-Koeffizienten gilt:

$$c_n[f_a] = e_{-n}(a) c_n[f] \text{ (Phasenfaktor der Fourier-Koeffizienten).}$$

ii) Wenn f sogar stetig-differenzierbar ist, so gilt für die Fourier-Koeffizienten der Ableitung f' :

$$c_n[f'] = i \cdot n \cdot c_n[f] \text{ (Multiplikation der Fourier-Koeffizienten).}$$

Beweis. ad i) Wir wenden auf die Berechnung der Fourier-Koeffizienten die Substitutionsformel der Integration für Parametertransformation an:

$$c_n[f_a] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_a(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-a) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(\tau) e^{-in(\tau+a)} d\tau = \frac{e^{-ina}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-in\tau} d\tau$$

mit der Substitution

$$t = \tau - a.$$

ad ii) Der Beweis beruht auf der partiellen Integration

$$c_n[f'] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left[f(t) e^{-int} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{i \cdot n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \text{ QED.}$$

Das Hauptresultat dieses Kapitels ist Satz 3.9 über die Konvergenz der Fourier-Reihe im Falle einer stetigen, stückweise stetig-differenzierbaren Funktion.

3.5 Definition (Stückweise stetige Differenzierbarkeit)

Eine Funktion

$$f: I \rightarrow \mathbf{C}$$

auf einem abgeschlossenen Intervall $I \subset \mathbf{R}$ heißt *stückweise stetig-differenzierbar*, wenn es eine endliche Zerlegung von I in abgeschlossene Intervalle

$$I_k, k = 1, \dots, n$$

gibt, die jeweils nur die Randpunkte gemeinsam haben, so daß gilt: Im Innern jedes Intervalles ist die Einschränkung von f stetig-differenzierbar, und an jedem Randpunkt x_0 eines Intervalles existieren die halbseitigen Grenzwerte

- der Funktion $f_+(x_0) := \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$ und $f_-(x_0) := \lim_{x \uparrow x_0} f(x)$
- und ihrer Ableitungen $f'_+(x_0) := \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f_+(x_0)}{x - x_0}$ und $f'_-(x_0) := \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f_-(x_0)}{x - x_0}$.

Grundlegende Bedeutung für die Theorie der Fourier-Reihen hat die unendliche Reihe aller trigonometrischen Monome. Wir approximieren sie durch ihre endlichen Partialsummen.

3.6 Definition (Dirichlet-Kern)

Der N -te *Dirichlet-Kern* ist die N -te Partialsumme der trigonometrischen Monome

$$D_N := \sum_{|n| \leq N} e_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}.$$

3.7 Lemma (Dirichlet-Kern)

Für den Dirichlet-Kern gilt

$$D_N(x) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}, x \in \mathbf{R}.$$

Die Funktion ist gerade, sie hat die Periode 2π , und es gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1.$$

Beweis. Der Beweis beruht auf der Formel für die endliche geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^N q^n = \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1}$$

und der Euler-Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Es gilt

$$D_N(x) := \sum_{|n| \leq N} e^{inx} = e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} = e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1}$$

Wir erweitern den Bruch mit $e^{-\frac{ix}{2}}$ und erhalten

$$\frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} = \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})x]}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Die übrigen Aussagen des Lemmas sind leicht nachzurechnen, QED.

Der folgende Satz 3.8 ist der Schlüssel im Konvergenzbeweis von Satz 3.9.

3.8 Satz (Riemann-Lebesgue Lemma)

Es sei $I \subset \mathbf{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und

$$g \in L^1(I)$$

eine integrierbare Funktion. Dann gilt

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_I g(t) e^{ixt} dt = 0.$$

Beweis. i) Jede Funktion $g \in L^1(I)$ läßt sich bzgl. der L^1 -Norm durch stetig-differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger im offenen Kern $\overset{\circ}{I}$ approximieren ([For1983], §10, Corollar zu Satz 3). Man reduziert daher die Behauptung des Satzes auf den Fall eines kompakten Intervalls

$$I = [a, b]$$

und einer stetig-differenzierbaren Funktion g mit Träger in $\overset{\circ}{I}$.

ii) Wir berechnen mit partieller Integration für jedes feste $x \in \mathbf{R}$

$$\int_a^b e^{ixt} g(t) dt = \left[\frac{e^{ixt}}{ix} g(t) \right]_a^b - \frac{1}{ix} \int_a^b e^{ixt} g'(t) dt.$$

Wegen des Faktors $\frac{1}{ix}$ folgt die Behauptung

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_1 g(t) e^{ixt} dt = 0, \text{ QED.}$$

3.9 Satz (Gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe unter Differenzierbarkeits-Voraussetzungen)

Wenn die periodische Funktion

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$$

stetig und stückweise stetig-differenzierbar ist, so konvergiert ihre Fourier-Reihe gleichmäßig und absolut und hat die gegebene Funktion als Grenzwert.

Beweis. ad i) Wir zeigen zunächst die punktweise Konvergenz der Fourier-Reihe

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n[f] e_n \text{ mit } c_n[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) e^{-int}$$

gegen die Funktion. Hierzu stellen wir die N-te Partialsumme als die "Faltung" mit dem N-ten Dirichlet-Kern dar:

$$\begin{aligned} F_N[f](x) &:= \sum_{|n| \leq N} c_n[f] e^{inx} = \sum_{|n| \leq N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{|n| \leq N} f(t) e^{-int} e^{inx} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) \sum_{|n| \leq N} e^{in(x-t)} \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t) f(t) dt \end{aligned}$$

Wir behandeln zunächst die Konvergenz im Nullpunkt $x = 0$. Nach evtl. Abziehen einer Konstante dürfen wir

$$f(0) = 0$$

annehmen. Nach Voraussetzung ist f stetig im Nullpunkt, und es existieren dort die halbseitigen Ableitungen

$$f'_+(0) \text{ und } f'_-(0).$$

Daher läßt sich f ebenso wie die Sinus-Funktion in einer Umgebung des Nullpunktes durch lineare Funktionen approximieren. Wegen

$$f(0) = \sin(0) = 0$$

ist die Funktion

$$g(t) := \frac{f(t)}{\sin \frac{t}{2}}$$

in einer Umgebung des Nullpunktes beschränkt, insbesondere also integrierbar. Im Komplement der Nullumgebung ist die Funktion

$$\frac{1}{\sin \frac{t}{2}}$$

stetig-differenzierbar, also $g(t)$ ebenfalls integrierbar. Satz 3.8 und Lemma 3.7, angewendet mit

$$\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) t \right] = \operatorname{Im} \exp \left[i \left(N + \frac{1}{2} \right) t \right],$$

liefern

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\sin \frac{t}{2}} \sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) t \right] dt = 0.$$

Insgesamt haben wir damit gezeigt

$$F[f](0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(t) dt = 0 = f(0).$$

Zum Beweis der punktweisen Konvergenz an einer beliebigen festen Stelle x wenden wir auf die translatierte Funktion f_x die Aussage von Lemma 3.4, Teil i) an. Es folgt mit der bereits bewiesenen Konvergenz im Nullpunkt:

$$f(x) = f_x(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N[f_x](0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} c_n[f_x] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} e^{inx} c_n[f] = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N[f](x).$$

ad ii) Wir zeigen, daß die formale Fourier-Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert. Dann folgt nach Teil i) die Behauptung, da sie punktweise gegen f konvergiert.

Zunächst zeigen wir, daß die Familie der Fourier-Koeffizienten der Funktion f summierbar ist, d.h. daß die Partialsummen

$$\sum_{|n| \leq N} |c_n[f]|, \quad n \in \mathbb{N},$$

konvergieren: Da $f' \in L^2([-\pi, \pi])$ folgt aus der Besselschen Ungleichung im Hilbert-Raum

$L^2\left([-\pi, \pi], \frac{dt}{2\pi}\right)$ (Korollar 1.9) die quadratische Summierbarkeit

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\gamma_n|^2 \leq \|f'\|^2 < \infty$$

der Fourier-Koeffizienten von f'

$$\gamma_n := \langle f', e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \overline{e_n(t)} dt$$

bzgl. des Orthonormal-Systems der trigonometrischen Monome

$$(e_n(x) = e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Nach Lemma 3.4, Teil ii) gilt

$$\gamma_n = i n c_n[f] \text{ für alle } n \in \mathbf{Z}.$$

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz (Satz 1.2) folgt die absolute Summierbarkeit

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n[f]| = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left| (n c_n[f]) \frac{1}{n} \right| = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left| \gamma_n \frac{1}{n} \right| \leq \sqrt{\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\gamma_n|^2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left| \frac{1}{n} \right| < \infty.$$

Aus der Summierbarkeit der Fourier-Koeffizienten folgt die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n[f] e_n, \text{ QED.}$$

3.10 Korollar (Weierstraß'scher Approximationssatz, periodischer Fall)

Jede stetige periodische Funktion

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$$

läßt sich gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximieren.

Beweis. Zunächst approximieren wir f gleichmäßig durch stetige, stückweise-lineare Funktionen:

Wegen der Kompaktheit des Intervalles $[-\pi, \pi]$ ist die stetige Funktion f gleichmäßig stetig. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir eine Intervall-Länge $\delta > 0$, so daß f auf allen Teilintervallen der Länge δ um höchstens den Betrag ε schwankt. Wir zerlegen $[-\pi, \pi]$ in endlich viele Teilintervalle der Länge $\leq \delta$ und approximieren f auf jedem Teilintervall durch die Gerade durch die Funktionswerte am linken und rechten Rand. Die resultierende Funktion g ist stetig und stückweise-stetig differenzierbar.

Nach Satz 3.9 konvergiert die Fourier-Reihe von g gleichmäßig gegen g . Also läßt sich auch f gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximieren, QED.

3.11 Korollar (Hilbert-Basis der trigonometrischen Monome)

Die Familie der trigonometrischen Monome

$$(e_n(x) = e^{i n x})_{n \in \mathbf{Z}}$$

ist eine Hilbert-Basis des Hilbert-Raumes

$$L^2\left([-\pi, \pi], \frac{dt}{2\pi}\right),$$

d.h. des Raumes $L^2([-\pi, \pi])$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Beweis. Es bleibt die Vollständigkeit des Orthonormal-Systems der trigonometrischen Monome zu zeigen.

Jede stetige periodische Funktion läßt sich nach Korollar 3.10 gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximieren. Die Approximation gilt dann insbesondere im L^2 -Sinne. Da sich andererseits jede Funktion aus

$$L^2\left([-\pi, \pi], \frac{dt}{2\pi}\right)$$

im L^2 -Sinne durch stetige Funktionen approximieren läßt ([For1983], §10, Satz 3), ist das Orthonormal-System der trigonometrischen Monome vollständig, also eine Hilbert-Basis, QED.

3.12 Korollar (Weierstraß'scher Approximationssatz)

Über einem kompakten Intervall $I \subset \mathbf{R}$ läßt sich jede stetige Funktion

$$f: I \rightarrow \mathbf{C}$$

gleichmäßig durch Polynome approximieren.

Beweis. Wir nehmen o.E. an $I = [-\pi, 0]$ und setzen die gegebene Funktion zu einer periodischen Funktion der Periode 2π

$$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$$

fort: Zunächst spiegeln wir die Funktion f an der Geraden $t = 0$, dann setzen wir sie mit der Periode 2π fort. Die stetige periodische Funktion F läßt sich nach Korollar 3.10 gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximieren. Jedes dieser trigonometrischen Polynome läßt sich auf dem kompakten Intervall $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig durch die Partialsummen seiner Taylor-Reihe, also durch Polynome approximieren, QED.

3.13 Korollar (Hilbert-Basis der Legendre-Polynome)

Die Familie der normierten Legendre-Polynome

$$\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} D^n[(x^2-1)^n] \right)_{n \in \mathbf{N}}, \quad D^n := \frac{d^n}{dx^n},$$

ist eine Hilbert-Basis des Hilbert-Raumes $L^2([-1, 1])$.

Beweis. Zur Normierung und der Orthogonalität vgl. Beispiel 2.6 und Bemerkung 2.7. Zum Beweis der Vollständigkeit approximieren wir eine gegebene integrierbare Funktion zunächst im L^2 -Sinne durch stetige Funktionen. Nach Korollar 3.12 läßt sich jede stetige Funktion über dem kompakten Intervall

$$[-1, 1]$$

gleichmäßig durch Polynome approximieren. Der von den Polynomen eines Grades $\leq n$ aufgespannte Teilraum von $L^2([-1, 1])$ stimmt aus Dimensionsgründen mit dem von den ersten $n+1$ Legendre Polynomen aufgespannten Teilraum überein. Insgesamt läßt sich jede integrierbare Funktion im L^2 -Sinne durch die Legendre-Polynome approximieren, QED.

3.14 Bemerkung (Faltung, Distribution)

i) Im Beweis von Satz 3.9 tritt der Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t) f(t) dt$$

auf. Man nennt die hierdurch an der Stelle $x \in \mathbf{R}$ definierte Funktion die *Faltung*

$$D_N * f: \rightarrow \mathbf{C}$$

der Funktion D_N mit der Funktion f . Damit läßt sich die N -te Partialsumme der Fourier-Reihe kompakt schreiben als Faltung mit dem N -ten Dirichlet-Kern

$$F_N[f] = D_N * f.$$

ii) Würde man bereits, daß der Dirichlet-Kern als *Distribution* auf geeigneten Testfunktionen, zu denen f gehört, gegen die Delta-Distribution δ_0 konvergiert

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} D_N(x) = \delta_0(x)$$

und daß Summation und Integration vertauschen, so erhielte man sofort

$$F[f](x) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N[f](x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} D_N(x-t) \right] f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \delta_0(x-t) f(t) dt = f(x).$$

Der wesentliche Teil des Beweises von Satz 3.9 ist die Rechtfertigung dieser Heuristik. Wir werden in Kapitel 5 eine Einführung in die Theorie der Distributionen geben.

Im Beweis von Satz 3.9 wurde aus der Existenz der Ableitung die Summierbarkeit der Fourier-Koeffizienten abgeleitet. Diese Aussage ist der Spezialfall eines allgemeinen Zusammenhanges zwischen dem Grad der Differenzierbarkeit einer Funktion und der Summierbarkeit ihrer Fourier-Koeffizienten.

3.15 Satz (Differenzierbarkeit und Konvergenzverhalten)

Die periodische integrierbare Funktion

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$$

sei k -mal stetig-differenzierbar. Dann gibt es eine Konstante M , so daß alle Fourier-Koeffizienten von f die Abschätzung erfüllen

$$|c_n[f]| \leq \frac{M}{|n|^k}, n \in \mathbf{Z}.$$

Beweis. Durch Induktion über k . Für $k = 0$ folgt die Behauptung über die Beschränktheit der Fourier-Koeffizienten $c_n[f]$, $n \in \mathbf{Z}$, aus der Abschätzung

$$|c_n[f]| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt := M.$$

Im Induktionsschritt $k \mapsto k+1$ wendet man die Induktionsvoraussetzung auf die k -te Ableitung von f' an. Es gilt nach Lemma 3.4:

$$c_n[f'] = i n c_n[f],$$

also

$$|c_n[f]| \leq \frac{|c_n[f']|}{|n|} \leq \frac{M}{|n||n|^k}, n \in \mathbf{Z}, \text{ QED.}$$

4 Fourier-Integrale

In diesem Kapitel erweitern wir die Klasse der betrachteten Funktionen, indem wir auf die Voraussetzung der Periodizität verzichten. Für integrierbare Funktionen führen wir in Verallgemeinerung der Fourier-Reihe das Fourier-Integral ein. Während in der Fourier-Reihe nur eine diskrete Folge von Frequenzen auftritt, wird bei einem Fourier-Integral über das Kontinuum aller reellen Frequenzen integriert.

Ausgehend von der Definition des Fourier-Integrals für integrierbare Funktionen konstruieren wir die Fourier-Transformation auf dem Hilbert-Raum der quadrat-integrierbaren Funktionen. Der Hauptsatz dieses Kapitels ist die Umkehrformel der Fourier-Transformation (Satz 4.15).

4.1 Definition (Exponentialfunktion und Skalierung)

Wir bezeichnen für festes $a \in \mathbf{R}$ mit

$$e_a: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}, e_a(t) := e^{iat}$$

die Exponentialfunktion. Sie stellt die Aufnahme eines Phasenfaktors dar.

Wir bezeichnen für festes $a \in \mathbf{R}^*$ mit

$$\theta_a f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}, (\theta_a f)(t) := f\left(\frac{t}{a}\right)$$

die um den Faktor a skalierte Funktion. Sie stellt für $a > 1$ eine Streckung und für $a < 1$ eine Stauchung dar.

4.2 Definition (Fourier-Transformation)

Wir definieren die *Fourier-Transformation* einer integrierbaren Funktion

$$f \in L^1 = L^1(\mathbf{R})$$

als die Funktion

$$\hat{f}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}, \hat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{e_{i\omega}(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Manchmal faßt man die Variable $t \in \mathbf{R}$ als die Zeit auf. Dann beschreibt $f(t)$ ein Signal und die Fourier-Transformation $\hat{f}(\omega)$ das zugehörige Frequenzspektrum.

4.3 Bemerkung (Fourier-Transformation und komplexe Konjugation)

Es gilt

$$\overline{\hat{f}(\omega)} = (\overline{f})^\wedge(-\omega)$$

und für eine reelle Funktion f

$$\overline{\hat{f}(\omega)} = \hat{f}(-\omega).$$

4.4 Beispiel (Fourier-Transformation der Normalverteilung)

Die standardisierte Normalverteilung ist die Funktion

$$f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, f(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Es handelt sich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte wegen der Normierung

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

Für die Berechnung dieses nicht-trivialen Integrals siehe [For1976], §20.8.

Die standardisierte Normalverteilung geht bei Fourier Transformation in sich über, d.h.

$$\hat{f} = f.$$

Zum Beweis berechnen wir

$$g(\omega) := \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega t} dt.$$

Wir setzen

$$h(t, \omega) := e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega t}.$$

Für die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial \omega} h(t, \omega) := -it e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega t}$$

gilt die Abschätzung

$$\left| \frac{\partial}{\partial \omega} h(t, \omega) \right| := |t| e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Also ist die Ableitung ebenfalls integrierbar. Nach dem Satz über die Differenzierbarkeit eines Integrals nach einem Parameter ([For1983], §11, Satz 2) folgt

$$g'(\omega) := \frac{d}{d\omega} \int_{\mathbf{R}} h(t, \omega) dt = \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial h(t, \omega)}{\partial \omega} dt = -i \int_{\mathbf{R}} t e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega t} dt.$$

Zur Berechnung des letzten Integrals verwenden wir partielle Integration

$$\int_{-R}^R t e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega t} dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega t} \right]_{-R}^R - i\omega \int_{-R}^R e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega t} dt .$$

Der Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ liefert für die gesuchte Funktion g die lineare Differentialgleichung

$$g'(\omega) := -\omega g(\omega) .$$

Separation der Variablen liefert

$$\frac{dg}{g} = -\omega d\omega$$

also

$$g(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}} g(0) .$$

Aufgrund der Normierung gilt

$$g(0) = \sqrt{2\pi} ,$$

also

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} = f(\omega), \text{ QED.}$$

4.5 Lemma (Stetigkeit der Fourier-Transformation)

Die Fourier-Transformation einer integrierbaren Funktion ist eine stetige, beschränkte Funktion: Für

$$f \in L^1(\mathbf{R})$$

gilt

$$\left| \hat{f}(\omega) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1} \text{ für alle } \omega \in \mathbf{R} .$$

Es gilt

$$\lim_{\omega \rightarrow +/\infty} \hat{f}(\omega) = 0 .$$

Beweis. Die Stetigkeit folgt aus dem Satz über die stetige Parameterabhängigkeit des Integrals ([For1983], §11, Satz 1), die Beschränktheit aus der Gleichung

$$\left| e^{-i\omega t} \right| = 1 .$$

Die Aussage über das Grenzwertverhalten im Unendlichen folgt aus Satz 3.8, QED.

Wie folgendes Beispiel zeigt, ist die Fourier-Transformierte einer integrierbaren Funktion i.a. nicht mehr integrierbar. Vielmehr hängt das Abklingverhalten bzgl. der Frequenzen im Unendlichen von den Differenzierbarkeitseigenschaften des Ausgangssignals ab.

4.6 Beispiel (Nicht integrierbare Fourier-Transformation)

Die charakteristische Funktion des kompakten Intervalls $[-1, 1]$

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(t) := \begin{cases} 1 & t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

hat die Fourier-Transformation

$$\hat{f} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}.$$

Diese Funktion ist nicht integrierbar.

Beweis. Wir berechnen

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-1}^1 = \frac{i}{\omega \sqrt{2\pi}} [e^{-i\omega} - e^{i\omega}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}$$

Daß die Funktion \hat{f} nicht-integrierbar ist, liegt an der Divergenz der harmonischen Reihe

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}, \text{ QED.}$$

In Analogie zu Lemma 3.4, Teil i), untersuchen wir das Verhalten der Fourier-Transformation bei Translation.

4.7 Lemma (Translation und Dilatation bei Fourier-Transformation)

Für die Fourier-Transformation einer integrierbaren Funktion

$$f \in L^1(\mathbf{R})$$

gilt:

- Bezüglich der Translation τ_a mit festem $a \in \mathbf{R}$

$$(\hat{\tau}_a f) = e^{-ia} \hat{f}$$

$$(\tau_a \hat{f}) = e^{ia} \hat{f}$$

- Bezüglich der Skalierung mit festem $a \in \mathbf{R}^*$

$$(\hat{\theta}_a f) = |a| \cdot \hat{\theta}_{a^{-1}} f.$$

Beweis. ad i) Der Beweis beruht auf der Substitution $s = t - a$ bei der Integration

$$(\hat{\theta}_a f)^\wedge(\hat{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} (\tau_a f)(t) e^{-i\hat{u}t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(t-a) e^{-i\hat{u}t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(s) e^{-i\hat{u}a} e^{-i\hat{u}s} ds = e_{-a}(\omega) \hat{f}(\omega)$$

$$(e_a f)^\wedge(\hat{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{iat} f(t) e^{-i\hat{u}t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i(\hat{u}-a)t} dt = (\tau_a \hat{f})(\omega) .$$

ad ii) Der Beweis beruht auf der Substitution $s = \frac{t}{a}$ bei der Integration

$$(\theta_a f)^\wedge(\hat{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-i\hat{u}t} dt = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(s) e^{-i\hat{u}sa} ds = |a| (\theta_{a^{-1}} \hat{f})(\omega), \text{ QED.}$$

Das folgende Lemma wird im Beweis von Satz 4.15 verwendet.

4.8 Lemma

Für zwei integrierbare Funktionen

$$f, g \in L^1(\mathbf{R})$$

gilt die Formel

$$\int_{\mathbf{R}} f(t) \hat{g}(t) dt = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(t) g(t) dt .$$

Beweis. Man wendet den Satz von Fubini an auf die integrierbare Funktion zweier Veränderlicher

$$f(x) g(y) e^{-ixy}, \text{ QED.}$$

Der Weg von der Fourier-Transformation für integrierbare Funktionen zur Fourier-Transformation quadrat-integrierbarer Funktionen führt über die Teilklasse der schnell abfallenden (temperierten) Funktionen. Einerseits führt Fourier-Transformation nicht heraus aus dieser Teilklasse, andererseits ist die Klasse groß genug, um alle quadrat-integrierbaren Funktionen zu approximieren.

Auf dem Raum der temperierten Funktionen führen wir eine Topologie ein. Da die Funktionen differenzierbar sind, sollte die Topologie nicht nur die Funktionen, sondern auch die Größe ihrer Ableitungen messen. Daß die Funktionen schnell abfallen, bedeutet, daß jede Funktion und jede ihrer Ableitungen im Unendlichen schneller abfällt als jedes Polynom. Daher definieren wir die Topologie durch eine Folge von Semi-Normen: Die Semi-Norm $\| \cdot \|_{n,k}$ mißt das Wachstum der k-ten Ableitungen im Vergleich zu dem Monom n-ten Grades.

4.9 Definition (Temperierte Funktionen)

Auf der Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen führen wir eine Folge von Semi-Normen ein: Für $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ sei

$$\|f\|_{n,k} := \sup_{t \in \mathbf{R}} \left| (1 + |t|)^n f^{(k)}(t) \right|, \quad n, k \in \mathbf{N}.$$

Der Vektorraum $S = S(\mathbf{R})$ der *temperierten Funktionen* (oder *Schwartz-Raum*) ist die Menge

$$\{f \in C^\infty(\mathbf{R}) : \|f\|_{n,k} < \infty \text{ für alle } n, k \in \mathbf{N}\}$$

der beliebig oft differenzierbaren Funktionen, die selbst und deren jede Ableitung schneller abfallen als jede inverse Potenz, versehen mit der Addition und der Multiplikation mit komplexen Skalaren.

Auf S führen wir folgenden Konvergenzbegriff ein: Eine Folge $(f_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ von temperierten Funktionen konvergiert gegen Null

$$f_\nu \xrightarrow{S} 0,$$

wenn für alle Semi-Normen gilt:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|f_\nu\|_{n,k} = 0, \quad n, k \in \mathbf{N}.$$

4.10 Bemerkung

i) Wegen der binomischen Formel

$$(1 + |t|)^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} |t|^\nu$$

sind die Abschätzungen von

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \left| (1 + |t|)^n \cdot f^{(k)}(t) \right| \quad \text{für jedes Paar } n, k \in \mathbf{N}$$

gleichwertig zu entsprechenden Abschätzungen von

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \left| t^n \cdot f^{(k)}(t) \right| < \infty \quad \text{für jedes Paar } n, k \in \mathbf{N},$$

ii) Der Schwarz-Raum ist vollständig. Die Topologie läßt sich durch auch die abzählbare Familie von Normen beschreiben (Fréchet-Raum)

$$\|f\|_p := \sup_{k \leq p} \sup_{t \in \mathbf{R}} \left| (1 + |t|)^p f^{(k)}(t) \right|, \quad p \in \mathbf{N}.$$

4.11 Lemma (Produkt und Differentiation temperierter Funktionen)

i) Beliebige Ableitungen und Produkte temperierter Funktionen sind wieder temperiert.

ii) Das Produkt einer temperierten Funktion mit einer Funktion, für die jede Ableitung höchstens polynomial wächst, ist wieder temperiert.

4.12 Bemerkung

Temperierte Funktionen sind integrierbar, d.h.

$$S \subset L^1.$$

Zum Beweis verwendet man die Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} (1+|t|)^2 |f(t)| \frac{1}{(1+|t|)^2} dt \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |(1+|x|)^2 f(x)| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|t|)^2} dt < \infty.$$

In Analogie zu Lemma 3.4, Teil ii), untersuchen wir das Verhalten der Fourier-Transformation bei Differentiation. Gemäß dem folgenden Satz 4.13 werden Differentiation und Multiplikation jeweils ineinander übergeführt.

4.13 Satz (Fourier-Transformation temperierter Funktionen)

Gegeben sei eine temperierte Funktion

$$f \in S$$

und ein Polynom $P(t)$ einer Veränderlichen. Wir bezeichnen mit

$$D = \frac{d}{dx}$$

den Differentialoperator.

- Dann ergeben sich die Fourier-Transformationen der Ableitungen von f durch Multiplikation aus der Fourier-Transformation von f :

$$(P(D)f)^\wedge(\omega) = P(i\omega) \hat{f}(\omega)$$

- Die Fourier-Transformation von f gehört wieder zu S . Die Ableitungen der Fourier-Transformation von f sind die Fourier-Transformationen von Multiplikationen von f :

$$P(iD)\hat{f} = (P \cdot f)^\wedge.$$

Man hat also zwei kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} f \xrightarrow{\frac{d}{dt}} f' & & f \xrightarrow{-it} -it \cdot f \\ \wedge \downarrow & & \downarrow \wedge \\ \hat{f} \xrightarrow{i\omega} i\omega \cdot \hat{f} & \text{und} & \hat{f} \xrightarrow{\frac{d}{d\omega}} i\omega \hat{f} \end{array}$$

Beweis. Es genügt, die Behauptung für ein Monom

$$P(t) = t^k$$

und hier nur für den Fall $k = 1$ zu beweisen. Die Behauptung durch Einsetzen der Definition und partielle Integration bzw. Differentiation nach einem Parameter:

$$(f')^{\wedge}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(t) e^{-i\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) (-i\omega) e^{-i\omega t} dt = i\omega \hat{f}(\omega)$$

und

$$\begin{aligned} i \frac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega) &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\omega} \int_{\mathbb{R}} dt f(t) e^{-i\omega t} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{d}{d\omega} e^{-i\omega t} dt = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) (-it) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t f(t) e^{-i\omega t} dt = (P f)^{\wedge}(\omega). \end{aligned}$$

Zum Beweis, daß die Fourier-Transformation wieder temperiert ist, sind die Suprema

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \hat{u}^n \hat{f}^{(k)}(\omega) \right|, \quad n, k \in \mathbb{N},$$

abzuschätzen. Wir setzen für vorgegebenes $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi(t) := t^k f(t).$$

Dann gilt nach der bereits bewiesenen zweiten Formel angewendet auf f :

$$\hat{\varphi}(\hat{u}) = i^k \hat{f}^{(k)}(\omega),$$

also für vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \hat{u}^n \hat{f}^{(k)} \right| = \left| \hat{u}^n \hat{\varphi} \right|.$$

Weiter gilt nach der bereits bewiesenen ersten Formel angewendet auf φ :

$$(i\omega)^n \hat{\varphi}(\hat{u}) = (\varphi^{(n)})^{\wedge}(\omega),$$

also

$$\left| \hat{u}^n \hat{\varphi} \right| = \left| (\varphi^{(n)})^{\wedge} \right|.$$

Nach Lemma 4.5 ist die Fourier-Transformation $(\varphi^{(n)})^{\wedge}$ beschränkt, da $\varphi^{(n)}$ als temperierte Funktion integrierbar ist. Also gilt

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \hat{u}^n \hat{f}^{(k)}(\omega) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \varphi^{(n)} \right\|_{L^1} < \infty, \quad \text{QED.}$$

4.14 Lemma (Stetigkeit der Fourier-Transformation)

Die Fourier-Transformation

$$F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \quad f \mapsto \hat{f}$$

ist eine stetige lineare Abbildung auf dem Raum der temperierten Funktionen.

Beweis. Nach Satz 4.13 ist die Abbildung wohldefiniert. Zum Beweis der Stetigkeit genügt es, den Fall einer Nullfolge $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ von temperierten Funktionen zu betrachten. Mit

$$\varphi_\nu(t) := t^k f_\nu(t)$$

folgt analog zu Satz 4.13, Teil i) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \hat{u}^n \hat{f}_\nu^{(k)}(\omega) \right| &= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| (\varphi_\nu^{(n)})^\wedge(\omega) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left| \varphi_\nu^{(n)}(t) \right| dt \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\left| \varphi_\nu^{(n)}(t) \right| (1+|t|)^2 \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|t|)^2} dt \end{aligned}$$

Wegen

$$\varphi_\nu(t) = t^k f_\nu(t)$$

und der Leibniz-Formel

$$\varphi_\nu^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D_j t^k f_\nu^{(n-j)}$$

konvergieren nach Voraussetzung die Suprema

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \hat{u}^n \hat{f}_\nu^{(k)}(\omega) \right|$$

gegen Null, also konvergiert

$$\hat{f}_\nu \xrightarrow{s} 0, \text{ QED.}$$

Die Aussage von Lemma 4.14 läßt sich wesentlich verschärfen.

4.15 Satz (Umkehrformel der Fourier-Transformation)

Die Fourier-Transformation

$$F: S \rightarrow S, \varphi \mapsto \hat{\varphi},$$

ist ein Homöomorphismus. Die Umkehrabbildung hat die Gestalt

$$F^{-1}: S \rightarrow S, F^{-1}(\psi)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Beweis. Die Abbildung

$$G: S \rightarrow S, G(\psi)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

ist wohldefiniert, analog zu Bemerkung 4.12.

i) Wir zeigen zunächst die Gleichheit

$$\text{id} = G \circ F.$$

Sei $\varphi \in \mathcal{S}$ vorgegeben und $\hat{\varphi} := F(\varphi)$ gesetzt. Die Gleichheit der Funktionswerte an der Stelle $x = 0$

$$\varphi(0) = (G \circ F)(\varphi)(0)$$

bedeutet

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} d\omega \hat{\varphi}(\omega)$$

Wir beweisen diese Aussage als die Gleichheit zweier Grenzwerte. Wir approximieren die Dirac-Distribution durch einen Grenzwert von Integralen: Sei

$$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

die standardisierte Normalverteilung. Nach Lemma 4.8 gilt mit der Dilatation

$$\theta_a, a \in \mathbf{R}_+^*,$$

die Gleichung

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(\omega) (\theta_a \mu)^\wedge(\omega) d\omega = \int_{\mathbf{R}} \hat{\varphi}(\omega) (\theta_a \mu)(\omega) d\omega.$$

Für die linke Seite dieser Gleichung folgt nach Lemma 4.8 und wegen $\mu = \hat{\mu}$ (Beispiel 4.4)

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(\omega) (\theta_a \mu)^\wedge(\omega) d\omega = \int_{\mathbf{R}} \varphi(\omega) a (\theta_{a^{-1}} \hat{\mu})(\omega) d\omega = \int_{\mathbf{R}} (\theta_a \varphi)(y) \hat{\mu}(y) dy = \int_{\mathbf{R}} (\theta_a \varphi)(\omega) \mu(\omega) d\omega$$

Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz ([For1983], §9, Satz 2) ergibt sich der Grenzwert der linken Seite als

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} (\theta_a \varphi)(\omega) \mu(\omega) d\omega = \int_{\mathbf{R}} \lim_{a \rightarrow \infty} (\theta_a \varphi)(\omega) \mu(\omega) d\omega = \varphi(0) \int_{\mathbf{R}} \mu(\omega) d\omega = \varphi(0).$$

Wiederum mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz ergibt sich der Grenzwert der rechten Seite als

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} \hat{\varphi}(\omega) (\theta_a \mu)(\omega) d\omega = \int_{\mathbf{R}} \hat{\varphi}(\omega) \lim_{a \rightarrow \infty} (\theta_a \mu)(\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \hat{\varphi}(\omega) d\omega$$

Die Gleichheit beider Grenzwerte bedeutet

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \hat{\varphi}(\omega) d\omega.$$

Aus Lemma 4.7, angewendet auf die Fourier-Transformation einer Translation, folgt hieraus für beliebig festes Argument $x \in \mathbf{R}$ die Behauptung:

$$\varphi(x) = (\tau_{-x} \varphi)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} (\tau_{-x} \varphi)^\wedge(\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{i\omega x} \cdot \hat{\varphi}(\omega) d\omega = (G \circ F)(\varphi)(x).$$

ii) Die Gleichheit bei umgekehrter Kompositionreihenfolge

$$\text{id} = F \circ G$$

folgt - zunächst wieder für $x = 0$ - aus der Tatsache

$$(F \circ G)(\varphi)(0) = (G \circ F)(\theta_{-1} \varphi)(0),$$

und der bereits bewiesenen Aussage

$$(G \circ F)(\theta_{-1} \varphi)(0) = (\theta_{-1} \varphi)(0) = \varphi(0).$$

Hieraus folgt wie oben durch Translation der Fall eines beliebigen Argumentes $x \in \mathbf{R}$.

iii) Die Stetigkeit von F wurde in Satz 4.14 gezeigt; analog folgt die Stetigkeit von G , QED.

Obiger Satz 4.15 erlaubt nun die Fortsetzung der Fourier-Transformation zu einem isometrischen Isomorphismus des Hilbert-Raumes L^2 . Wir verwenden an dieser Stelle nur die Aussage über die Umkehrfunktion. Die Stetigkeit der Fourier-Transformation bzgl. der Schwarz-Topologie werden wir erst Kapitel 6 bei der Definition temperierter Distributionen und ihrer Fourier-Transformation benutzen.

4.16 Korollar (Fourier-Transformation als Isometrie)

Die temperierten Funktionen bilden einen dichten Teilraum des Hilbert-Raumes L^2 , auf dem die Fourier-Transformation eine Isometrie ist: Für zwei temperierte Funktionen

$$f, g \in \mathcal{S}$$

gilt:

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$$

Beweis. Die beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, also eine Teilmenge von \mathcal{S} , liegen bereits dicht in L^2 ([For1983] §10, Corollar zu Satz 3). Mit Satz 4.15 und Bemerkung 4.3 folgt

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{\mathbf{R}} f(t) \bar{g}(t) dt = \int_{\mathbf{R}} \bar{g}(t) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \bar{g}(t) e^{i\omega t} dt \right) d\omega = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) \theta_{-1} \left(\overline{\hat{g}} \right) (\omega) d\omega = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(t) \bar{\hat{g}} d\omega = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle, \text{ QED.} \end{aligned}$$

4.17 Satz (Fourier-Transformation als L^2 -Isomorphismus)

Die Fourier-Transformation läßt sich zu einem isometrischen Isomorphismus

$$F : L^2 \rightarrow L^2$$

von Hilbert-Räumen fortsetzen.

Beweis. Zunächst ist die Abbildung auf dem dichten Teilraum der temperierten Funktionen wohldefiniert

$$F : S \rightarrow L^2$$

und bildet diesen Teilraum nach Korollar 4.16 isometrisch auf sich ab. Als Hilbert-Raum ist L^2 vollständig, so daß eine eindeutige stetige Fortsetzung

$$F : L^2 \rightarrow L^2$$

existiert. Diese ist ebenfalls eine Isometrie, QED.

5 Distributionen

Distributionen sind eine Erweiterung des Begriffes der Funktion. Die erste Erweiterung dieser Art ist die von Dirac eingeführte Delta-Distribution. Sie selbst ist keine Funktion, kann aber in einem geeigneten Sinne als Grenzwert von Funktionen aufgefaßt werden. Während Funktionen im einfachsten Fall reelle Zahlen als Argument haben, leben Distributionen auf einer höheren Ebene: Ihr Definitionsbereich enthält als Argumente ganze Funktionen, sogenannte Testfunktionen. Man nennt Distributionen daher auch Funktionale. Jede integrierbare Funktion läßt sich als Distribution auffassen, indem man sie als Integraloperator auf die Klasse der Testfunktionen anwendet.

Die Bedeutung der Distributionen für die Analysis liegt darin, daß man Distributionen beliebig oft differenzieren kann und sie generell gute Eigenschaften bzgl. der Grenzwertbildung zeigen. Für Distributionen mit temperierten Funktionen als Testfunktionen läßt sich die Fourier-Transformierte definieren. Ein etwas kleinerer Definitionsbereich für Distributionen sind der Raum D aller der Testfunktionen mit kompaktem Träger. In Analogie zum Schwarz-Raum S führen wir auch auf D eine Topologie ein, die ihn zu einem vollständigen topologischen Vektorraum macht.

5.1 Definition (Testfunktionen)

Der Vektorraum $D = D(\mathbf{R})$ der *Testfunktionen* ist die Menge $C_c^\infty(\mathbf{R})$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, versehen mit der Addition und der Multiplikation mit komplexen Skalaren. Auf D führen wir folgenden Konvergenzbegriff ein: Eine Folge $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ von Testfunktionen konvergiert gegen eine Testfunktion φ ,

$$\varphi_\nu \xrightarrow{D} \varphi$$

- wenn eine kompakte Menge $K \subset \mathbf{R}$ existiert mit

$$\text{supp}(\varphi_\nu) \subset K \text{ für alle } \nu \in \mathbf{N},$$

- so daß für jedes $k \in \mathbf{N}$ die Folge der k -ten Ableitungen

$$\varphi_\nu^{(k)}, \nu \in \mathbf{N},$$

gleichmäßig konvergiert auf K gegen die k -te Ableitung

$$\varphi^{(k)}.$$

5.2 Definition (Dirac-Distribution)

Das lineare Funktional

$$\delta : D \rightarrow \mathbf{C}, \delta_a[\varphi] := \varphi(a)$$

mit einer festen Stelle $a \in \mathbf{R}$ heißt *Dirac-Distribution* (oder *Delta-Distribution*) an der Stelle a .

5.3 Definition (Reguläre Distributionen)

Jede lokal-integrierbare Funktion f definiert ein lineares Funktional auf den Testfunktionen:

$$T_f : D \rightarrow C, \quad T_f[\varphi] := \int_{\mathbf{R}} f(t) \varphi(t) dt.$$

5.4 Satz (Approximation der Dirac-Distribution)

Für jede integrierbare Funktion $f \in L^1(\mathbf{R})$ mit

$$\int_{\mathbf{R}} f(t) dt = 1$$

approximieren die regulären Distributionen

$$T_{f_a} : D \rightarrow C,$$

die von den skalierten Funktionen

$$f_a := \frac{1}{a} \theta_a f, \quad a > 0,$$

erzeugt werden, bzgl. des Grenzübergangs $a \rightarrow 0$ die Dirac-Distribution δ_0 , d.h. für jede Testfunktion $\varphi \in D$ gilt:

$$\lim_{a \rightarrow 0} T_{f_a}[\varphi] = \delta_0[\varphi] = \varphi(0).$$

Beweis. Wir berechnen für festes $a > 0$ mit der Substitution $t = a x$

$$T_{f_a}[\varphi] = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right) \varphi(t) dt = \int_{\mathbf{R}} f(x) \varphi(ax) dx.$$

Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz ([For1983], §9, Satz 2) darf man Integration und Limesbildung vertauschen und erhält

$$\lim_{a \rightarrow 0} T_{f_a}[\varphi] = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} f(x) \varphi(ax) dx = \int_{\mathbf{R}} f(x) \lim_{a \rightarrow 0} \varphi(ax) dx = \int_{\mathbf{R}} f(x) \varphi(0) dx = \varphi(0), \text{ QED.}$$

5.5 Definition (Distribution)

Eine *Distribution* ist ein lineares Funktional auf dem Raum der Testfunktionen

$$T : D \rightarrow C,$$

das stetig ist bzgl. der Topologie von D . Wir bezeichnen mit D' den komplexen Vektorraum der Distributionen.

5.6 Bemerkung

- i) Die Dirac-Distribution ist eine Distribution im Sinne von Definition 5.5.
- ii) Jede reguläre Distribution T_f ist eine Distribution im Sinne von Definition 5.5. Zum Beweis beachte man, daß nur über ein festes Kompaktum integriert werden muß und hier die

Konvergenz der Testfunktionen sogar gleichmäßig ist. Durch den Übergang zur Distribution erhält man eine kanonische Abbildung

$$L^2 \longrightarrow D', f \mapsto T_f,$$

vermöge derer sich jede L^2 -Funktion auch als Distribution auffassen läßt. Der Kern dieser Abbildung sind diejenigen quadrat-integrierbaren Funktionen, die fast überall Null sind.

iii) Die Dirac-Distribution ist nicht regulär.

Viele aus der Analysis bekannte Operationen überträgt man auf Distributionen, indem man sie auf ihre Argumente anwendet - also auf die Testfunktionen.

5.7 Definition (Multiplikation mit Funktionen)

Das Produkt einer Distribution

$$T : D \rightarrow \mathbb{C}$$

mit einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $g \in C^\infty$ ist definiert als die Distribution

$$g \cdot T : D \rightarrow \mathbb{C}, (g \cdot T)[\varphi] := T[g \varphi].$$

Das Produkt ist wohldefiniert, da für jede Testfunktion $\varphi \in D$ auch das Produkt

$$g \cdot \varphi$$

wieder kompakten Träger hat.

5.8 Definition (Translation und Dilation einer Distribution)

Für eine Distribution $T \in D'$ definiert man die *Translation* um die Strecke $a \in \mathbb{R}$ als die Distribution

$$\tau_a T : D \longrightarrow \mathbb{C}, (\tau_a T)[\varphi] := T[\tau_{-a} \varphi]$$

und die *Dilation* um den Faktor $a \in \mathbb{R}^*$ als die Distribution

$$\theta_a T : D \longrightarrow \mathbb{C}, (\theta_a T)[\varphi] := T[|a| \cdot \theta_{a^{-1}} \varphi] = |a| \cdot T[\theta_{a^{-1}} \varphi].$$

5.9 Definition (Ableitung einer Distribution)

Die *Ableitung* einer Distribution $T \in D'$ ist definiert als das Funktional

$$T' : D \rightarrow \mathbb{C}, T'[\varphi] := -T[\varphi'].$$

Offensichtlich ist die Ableitung wieder ein stetiges Funktional, also eine Distribution.

Das negative Vorzeichen in Definition 5.9 ist motiviert durch die Ableitung von regulären Distributionen T_f mit einer stetig-differenzierbaren Funktion f . Durch partielle Integration erhält man unter Berücksichtigung der Tatsache, daß Testfunktionen kompakten Träger haben:

$$\begin{aligned}
 (T_f)'[\varphi] &= -T_f[\varphi'] = -\int_{\mathbf{R}} f(t) \varphi'(t) dt = [-f(t) \varphi(t)]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbf{R}} f'(t) \varphi(t) dt = \\
 &T_{f'}[\varphi],
 \end{aligned}$$

also in diesem Fall

$$(T_f)' = T_{f'}.$$

5.10 Beispiel (Ableitung der Heaviside-Distribution)

Die Heaviside'sche Sprungfunktion ist definiert als

$$H: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}, H(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}.$$

Sie hat – aufgefaßt als reguläre Distribution T_H – als Ableitung die Dirac-Distribution δ_0 .

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{D}$ eine Testfunktion. Dann gilt

$$T_H'[\varphi] = -T_H[\varphi'] = -\int_{\mathbf{R}} H(t) \varphi'(t) dt = -\int_0^{\infty} \varphi'(t) dt = -[\varphi(t)]_0^{\infty} = \varphi(0) = \delta_0[\varphi], \text{ QED.}$$

5.11 Definition (Konvergenz von Distributionen)

Eine Folge von Distributionen $T_n \in \mathcal{D}'$, $n \in \mathbf{N}$, konvergiert gegen eine Distribution $T \in \mathcal{D}'$,

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T,$$

wenn sie auf allen Testfunktionen konvergiert, d.h. wenn für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n[\varphi] = T[\varphi].$$

In diesem Sinne konvergieren die in Satz 5.4 betrachteten Funktionen – aufgefaßt als Distributionen – gegen die Dirac-Distribution.

5.12 Beispiel

Der Grenzwert

$$\sum_{N \in \mathbf{Z}} \delta_{2\pi n} := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \delta_{2\pi n}$$

existiert als Grenzwert von Distributionen.

Zum Beweis beachte man, daß eine Aussage über Testfunktionen zu zeigen ist. Diese haben nach Definition kompakten Träger, so daß sich beide unendlichen Reihen auf eine endliche Summe reduzieren. Wir werden diese Distribution noch einmal in Satz 6.9 berechnen.

6 Fourier-Transformation temperierter Distributionen

In diesem Kapitel übertragen wir die Fourier-Transformation, die wir bisher für Funktionen aus den Klassen L^1 und L^2 kennen, auf die größere Klasse der Distributionen. Allerdings werden wir nicht den allgemeinsten Fall, sondern nur den Fall temperierter Distributionen betrachten. Als Hauptsatz dieses Kapitels berechnen wir den Grenzwert der Dirichlet-Kerne und folgern daraus mit der Fourier-Transformation temperierter Distributionen die Poisson-Formel.

6.1 Satz (Testfunktionen und temperierte Funktionen)

Die Inklusion

$$D \rightarrow S$$

der Testfunktionen in die Klasse der temperierten Funktionen

- ist stetig, d.h.

$$\varphi_v \xrightarrow{D} \varphi \text{ impliziert } \varphi_v \xrightarrow{S} \varphi,$$

- und hat dichtes Bild, d.h. zu jeder temperierten Funktion $\varphi \in S$ existiert eine Folge von Testfunktionen

$$(\varphi_v)_{v \in \mathbb{N}}, \varphi_v \in D,$$

mit

$$\varphi_v \xrightarrow{S} \varphi.$$

Beweis. ad i) Für die Stetigkeit ist zu zeigen, daß eine Nullfolge von Testfunktionen in D auch eine Nullfolge in S ist, d.h. bzgl. der Familie der Semi-Normen

$$\|f\|_{n,k} := \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| (1+|t|)^n f^{(k)}(t) \right|, k, n \in \mathbb{N},$$

gegen Null konvergiert.

Nach Voraussetzung haben alle Testfunktionen einer gegebenen Nullfolge ihren Träger in einem festen Kompaktum. Die gleichmäßige Konvergenz gegen Null aller Ableitungen auf diesem Kompaktum impliziert die Konvergenz gegen Null in jeder Semi-Norm.

ad ii) Um zu zeigen, daß D eine dichte Teilmenge von S ist, wählen wir eine C^∞ -Funktion

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \varphi|_{[-1,1]} \equiv 1 \text{ und } \text{supp}(\varphi) \subset [-2,2]$$

und bezeichnen mit

$$\theta_N \varphi, N \in \mathbb{N}^*,$$

die um den Faktor N gestreckte Funktion

$$\theta_N \varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \theta_N \varphi|_{[-N,N]} \equiv 1 \text{ und } \text{supp}(\theta_N \varphi) \subset [-2N, 2N].$$

Zu einer gegebenen temperierten Funktion $f \in S$ bilden wir die Folge

$$(f_N := f \cdot \theta_N \varphi)_{N \in \mathbb{N}^*}$$

von Testfunktionen mit kompaktem Träger. Aus der Leibniz-Formel

$$D_k (f - f_N) = D_k [(1 - \theta_N \varphi) \cdot f] = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} D_i (1 - \theta_N \varphi) D_{k-i} f$$

erhalten wir unter Berücksichtigung von

$$D_i (1 - \theta_N \varphi) = \frac{1}{N^i} \cdot (D_i \varphi), \quad i \geq 1, \text{ und}$$

$$\text{supp} (1 - \theta_N \varphi) \subset \mathbf{R} - [-N, N]$$

die gesuchten Grenzwerte

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\|_{k,n} = 0, \quad k, n \in \mathbb{N}, \text{ QED.}$$

6.2 Bemerkung

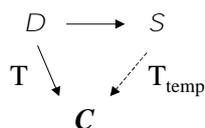
Die in Definition 5.1 angegebene Topologie von D ist echt feiner als die von S induzierte Unterraumtopologie. Insbesondere ist D bzgl. der Unterraum-Topologie nicht vollständig.

6.3 Definition (Temperierte Distribution)

Eine Distribution $T \in D'$ heißt *temperiert*, wenn sie auch bezüglich der größeren von S auf D induzierten Topologie stetig ist.

6.4 Satz (Temperierte Distribution)

Jede temperierte Distribution T läßt sich eindeutig zu einer stetigen linearen Abbildung T_{temp} auf S fortsetzen.



Hierdurch entsprechen die temperierten Distributionen genau den stetigen linearen Funktionalen auf dem Vektorraum der temperierten Funktionen.

Beweis. Eine temperierte Distribution ist stetig bzgl. jeder der in der Definition von S auftretenden Semi-Normen. Als lineare Abbildung ist sie in jeder dieser Semi-Normen gleichmäßig stetig. Da D nach Satz 6.1 ein dichter Teilraum von S ist, kann man T stetig nach S fortsetzen, und diese Fortsetzung ist eindeutig bestimmt, QED.

6.5 Bemerkung (Temperierte Distributionen)

- i) Die Dirac-Distribution ist temperiert.
- ii) Jedes Polynom P definiert durch Integration gemäß Bemerkung 5.6 eine reguläre Distribution T_P . Diese Distribution ist temperiert.

6.6 Definition (Fourier-Transformation temperierter Distributionen)

Die Fourier-Transformation einer temperierten Distribution

$$T: S \rightarrow C$$

ist definiert als die Komposition

$$\hat{T} := F [T] := T \circ F : S \longrightarrow C ,$$

d.h. für eine temperierte Funktion $\varphi \in S$ ist definiert:

$$(F [T]) [\varphi] := T [F [\varphi]] .$$

Wegen der Stetigkeit der Fourier-Transformation temperierter Funktionen (Satz 4.14)

$$F : S \longrightarrow S$$

ist die Fourier-Transformation einer temperierten Distribution wieder eine temperierte Distribution.

6.7 Lemma (Fourier-Transformation der Dirac-Distribution)

i) Die Fourier-Transformation der Funktion e_{ia} - aufgefaßt als reguläre Distribution - ist die Dirac-Distribution, genauer: Es gilt

$$(e_{ia})^\wedge = \sqrt{2\pi} \delta_a$$

als Aussage über temperierte Distributionen.

ii) Die Fourier-Transformation der Dirac-Distribution ist die Exponentialfunktion

$$(\delta_a)^\wedge = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_{-ia} .$$

Beweis. ad i) Nach der Umkehrformel, Satz 4.15, gilt für eine temperierte Funktion φ

$$(T_{e_{ia}})^\wedge [\varphi] = (T_{e_{ia}}) [\hat{\varphi}] = \int_R e^{ia\omega} \hat{\varphi}(\omega) d\omega = \sqrt{2\pi} \varphi(a) = \sqrt{2\pi} \delta_a [\varphi] .$$

ad ii) Nach Definition gilt für eine temperierte Funktion $\varphi \in S$

$$(\delta_a)^\wedge [\varphi] = \delta_a [\hat{\varphi}] = \hat{\varphi}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \varphi(t) e_{-ia}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} T_{e_{-ia}} [\varphi] , \text{ QED.}$$

Wir beweisen als eine weitere Anwendung des Permanenz-Prinzips, daß sich unter Fourier-Transformation Translation und Skalierung bei temperierten Distributionen genauso verhalten wie bei Funktionen.

6.8 Lemma (Translation und Dilatation bei Fourier-Transformation temperierter Distributionen)

Es sei $T \in \mathcal{S}'$ eine temperierte Distribution. Dann gilt

$$(\tau_a T)^\wedge = e^{-ia} T \quad \text{und} \quad (\theta_a T)^\wedge = |a| \theta_{a^{-1}} \hat{T}.$$

Beweis. Der Beweis besteht in der Anwendung von Lemma 4.7 auf die Definition 5.8, QED.

6.9 Satz (Konvergenz der Dirichlet-Kerne)

Die in Definition 3.6 eingeführten Dirichlet Kerne D_N , $N \in \mathbb{N}$, konvergieren als Distribution:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} D_N = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}.$$

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{D}$ eine vorgegebene Testfunktion. Wir führen die Behauptung auf den periodischen Fall zurück: Wir definieren die periodische C^∞ -Funktion

$$\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \Phi(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(t + 2\pi n).$$

Die Funktion ist wohldefiniert, da φ kompakten Träger hat. Wir setzen zur Abkürzung (vgl. Beispiel 5.12)

$$T := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}.$$

Einerseits gilt

$$T[\varphi] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}[\varphi] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(2\pi n) = \Phi(0).$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} D_N[\varphi] &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{int} \varphi(t) dt = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{int} \varphi(t) dt = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{int} \varphi(t + 2\pi k) dt \\ &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(t + 2\pi k) dt = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} \Phi(t) dt = \sum_{n=-N}^N c_n[\Phi]. \end{aligned}$$

Mit Satz 3.9 folgt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} D_N[\varphi] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n[\Phi] = \Phi(0) = T[\varphi], \quad \text{QED.}$$

6.10 Folgerung (Poisson Formel)

Es gilt folgende Aussage als Gleichheit temperierter Distributionen

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n \right)^\wedge = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}.$$

Beweis. Wir stellen die linke Seite der Gleichung von Satz 6.9

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_{in} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$$

als Fourier-Transformation temperierter Distributionen dar: Nach Lemma 6.7, Teil ii) gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_{in} = \hat{\delta}_{-n}.$$

Wir erhalten

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n \right)^\wedge = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\delta}_{-n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}, \text{ QED}$$

6.11 Beispiel (Transformationsformel der Theta-Funktion)

Wir wenden die Poisson-Formel auf eine bestimmte temperierte Funktion an, nämlich auf die Gauss-Funktion

$$f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, f(t) := e^{-at^2}$$

mit festem, aber beliebigem Parameter $a > 0$. Mit Folgerung 6.10 erhalten wir:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n).$$

Für die Gauss-Kurve

$$g: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, g(t) := e^{-\frac{t^2}{2}}$$

gilt nach Beispiel 4.4

$$\hat{g} = g.$$

Es ist

$$f = \theta_b g \text{ mit } b = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Es folgt nach Lemma 4.7

$$\hat{f} = b \theta_{b^{-1}} \hat{g} = b \theta_{b^{-1}} g = b \theta_{b^{-2}} f.$$

Wir erhalten

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(b^2 n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n),$$

d.h.

$$\frac{b}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-a(b^2 n)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-a(2\pi n)^2}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{n^2}{4a}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-a4\pi^2 n^2}$$

Mit

$$\tau := 4\pi a > 0$$

folgt für die Theta-Funktion

$$\Theta(\tau) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\tau n^2}, \quad \tau > 0,$$

die Transformationsformel

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{\tau}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\tau \pi n^2},$$

d.h.

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} \Theta\left(\frac{1}{\tau}\right) := \Theta(\tau), \quad \tau > 0.$$

7 Faltung

In diesem Abschnitt definieren wir die Faltung zweier Funktionen und erweitern die Definition auf die Faltung einer Distribution mit einer Funktion. Wir beweisen den Faltungssatz über die Fourier-Transformation einer Faltung. Das Hauptresultat dieses Kapitels ist das Abtast-Theorem von Shannon für frequenzbeschränkte Signale.

7.1 Bemerkung (Integrierbarkeit im Produktraum)

Für zwei integrierbare Funktionen

$$f, g \in L^1$$

ist die Funktion zweier Veränderlicher

$$\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}, (x, y) \mapsto f(x) g(y)$$

integrierbar, ebenso die Funktion

$$\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}, (x, y) \mapsto f(x) g(y - x).$$

Nach dem Satz von Fubini ([For1983], § 7, Satz 7) ist - bis auf eine Nullmenge - für jedes feste $y \in \mathbf{R}$ die Einschränkung

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}, x \mapsto f(x) g(y - x)$$

integrierbar, und das Integral definiert eine integrierbare Funktion

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}, y \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x) g(y - x) dx.$$

Aufgrund von Bemerkung 7.1 kann man die Faltung mit einer L^1 -Funktion definieren:

7.2 Definition (Faltung)

Eine integrierbare Funktion

$$g \in L^1$$

definiert eine \mathbf{C} -lineare Abbildung, die *Faltung* mit g ,

$$L^1 \rightarrow L^1, f \mapsto f * g \text{ mit } (f * g)(\omega) := \int_{\mathbf{R}} f(t) g(\omega - t) dt.$$

Offensichtlich ist das Faltungsprodukt kommutativ, d.h. es gilt

$$f * g = g * f.$$

Der Vektorraum L^1 bildet bzgl. Addition und Faltung von Funktionen eine kommutative C -Algebra ohne 1-Element. Die Fourier-Transformation überführt die Faltung in ein Produkt. Da das Produkt zweier integrierbarer Funktionen nicht notwendig wieder integrierbar sein muß, setzen wir bei der Umkehrung beide Faktoren als temperiert voraus.

7.3 Satz (Fourier-Transformation der Faltung von Funktionen)

i) Für die Fourier-Transformation der Faltung zweier integrierbarer Funktionen

$$f, g \in L^1(\mathbf{R})$$

gilt die Formel

$$(f * g)^\wedge = \sqrt{2\pi} \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

ii) Umgekehrt gilt für zwei temperierte Funktionen

$$f, g \in \mathcal{S}$$

die Formel

$$\sqrt{2\pi} (f \cdot g)^\wedge = \hat{f} * \hat{g}$$

Beweis. ad i) Die angegebene Formel folgt durch explizites Einsetzen der Definition, die Substitution

$$t - y = s$$

und die Anwendung des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} (f * g)(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{\mathbf{R}^2} f(y) g(t-y) e^{-i\omega t} dt dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{\mathbf{R}^2} f(y) g(s) e^{-i\omega(s+y)} ds dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(y) e^{-i\omega y} dy \cdot \int_{\mathbf{R}} g(s) e^{-i\omega s} ds = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) . \end{aligned}$$

Die Faltung zweier integrierbarer Funktionen ist wieder integrierbar, ihre Fourier-Transformierte ist stetig nach Lemma 4.5. Daher macht Teil i) eine Aussage über die Gleichheit zweier stetiger, aber nicht notwendig integrierbarer Funktionen.

ad ii) Das Produkt zweier temperierter Funktionen ist wieder temperiert, also insbesondere integrierbar. Daher ist die Fourier-Transformierte wohldefiniert. Wir führen den Beweis auf die Aussage von Teil i) zurück, indem wir als Korollar des Umkehrsatzes 4.15 die Formel verwenden

$$\hat{\hat{h}}(x) = h(-x) = (\theta_{-1}h)(x).$$

Nach Teil i) gilt

$$(\hat{f} * \hat{g})^\wedge = \sqrt{2\pi} \hat{f} \cdot \hat{g} = \sqrt{2\pi} (f \cdot g)^\wedge.$$

Die Fourier-Transformation temperierter Funktionen ist ein Isomorphismus nach Satz 4.15, also gilt auch

$$\hat{f} * \hat{g} = \sqrt{2\pi} (f \cdot g)^\wedge, \text{ QED.}$$

7.4 Definition (Faltung einer Distribution)

Es sei $T \in \mathcal{D}'$ eine Distribution und $g \in \mathcal{D}$ eine Testfunktion. Dann definieren wir als die *Faltung* von T mit g die Funktion

$$(T * g): \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C} \text{ mit } (T * g)(x) := T[\check{\tau}_x g],$$

wobei

$$\check{\tau}_x g: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, (\check{\tau}_x g)(y) := g(x - y).$$

7.5 Bemerkung (Faltung einer Distribution)

i) Die in Definition 7.4 eingeführte Faltung

$$(T * g): \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$$

ist eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Sie heißt die *Regularisierung* der Distribution T durch die Funktion g .

ii) Analog zu Definition 7.4 kann man die Faltung einer temperierten Distribution mit einer temperierten Funktion definieren.

iii) Im Falle von Distributionen mit kompaktem Träger wie der Dirac-Distribution, kann man auch Faltungen mit Funktionen aus den größeren Funktionenklassen C^∞ oder der Klasse C der stetigen Funktionen definieren.

Definition 7.4 verallgemeinert die in Definition 7.2 eingeführte Faltung integrierbarer Funktionen. Es gilt:

7.6 Lemma (Faltung einer regulären Distribution)

Im Falle einer regulären Distribution

$$T = T_f$$

mit einer lokal-integrierbaren Funktion f gilt für die Faltung mit einer Testfunktion g die Gleichheit von Funktionen

$$T_f * g = f * g.$$

Beweis. Es gilt

$$(f * g)(\omega) := \int_{\mathbf{R}} f(t) g(\omega - t) dt,$$

andererseits ist

$$(T_f * g)(\omega) = T_f[\check{\tau}_\omega g] = \int_{\mathbf{R}} f(t) g(\omega - t) dt, \text{ QED.}$$

7.7 Lemma (Faltung einer Distribution)

Es seien $T \in \mathcal{S}'$ eine temperierte Distribution und $g \in \mathcal{S}$ eine temperierte Funktion. Dann gilt für die Anwendung auf eine Testfunktion $\varphi \in \mathcal{S}$

$$(T * g)[\varphi] = T[(\theta_{-1}g) * \varphi].$$

Beweis.

$$(T * g)[\varphi] = \int_{\mathbb{R}} T[\tau_t g] \cdot \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} T_y[g(t-y)] \cdot \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} T_y[g(t-y)\varphi(t)] dt$$

Wir verwenden - ohne Beweis - als Folgerung aus der Stetigkeit der Distribution, daß wir die Integration und die Anwendung der Distribution vertauschen dürfen. Wir erhalten

$$\int_{\mathbb{R}} T_y[g(t-y)\varphi(t)] dt = T_y\left[\int_{\mathbb{R}} g(t-y) \cdot \varphi(t) dt\right] = T_y\left[\int_{\mathbb{R}} (\theta_{-1}g)(y-t) \cdot \varphi(t) dt\right] = T[(\theta_{-1}g) * \varphi]$$

7.8 Beispiel (Faltung der Dirac-Distribution)

Die Regularisierung der Dirac-Distribution mit einer Testfunktion $g \in \mathcal{S}$ ist die translatierte Testfunktion:

$$\delta_a * g = \tau_a g.$$

Insbesondere wirkt die Dirac-Distribution im Nullpunkt δ_0 als Einheit bezüglich des Faltungsproduktes.

Beweis. Es gilt

$$(\delta_a * g)(t) = \delta_a[\tau_t g] = g(t-a) = (\tau_a g)(t), \text{ QED.}$$

Der Faltungssatz 7.3 läßt sich auf die Faltung einer Distribution erweitern.

7.9 Satz (Fourier-Transformation der Faltung mit einer Distribution)

Es sei $T \in \mathcal{S}'$ eine temperierte Distribution und $g \in \mathcal{S}$ eine temperierte Funktion. Dann gilt

$$(T * g)^\wedge = \sqrt{2\pi} \hat{T} \cdot \hat{g} \quad \text{und} \quad (T \cdot g)^\wedge = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{T} * \hat{g}.$$

Beweis. ad i) Sei $\varphi \in \mathcal{S}$ eine temperierte Testfunktion. Wir berechnen die linke Seite mit Lemma 7.7

$$(T * g)^\wedge[\varphi] = (T * g)[\hat{\varphi}] = T[(\theta_{-1}g) * \hat{\varphi}]$$

Für die rechte Seite gilt mit der Faltungsformel für Funktionen, Satz 7.3,

$$\sqrt{2\pi} (\hat{T} \cdot \hat{g})[\varphi] = \hat{T}[\sqrt{2\pi} \hat{g} \cdot \varphi] = T[\sqrt{2\pi} (\hat{g} \cdot \varphi)^\wedge] = T[(\theta_{-1}g) * \hat{\varphi}].$$

Die Formel des zweiten Teils folgt wie im Beweis von Satz 7.3 aus dem ersten Teil, QED.

Die Bedeutung des folgenden Theorems 7.10 liegt darin, daß es die Rekonstruktion einer Funktion aus einem diskreten Satz von Funktionswerten erlaubt - unter der Voraussetzung, daß die Fourier-Transformation der Funktion nur Frequenzen aus einem beschränkten Intervall enthält.

7.10 Satz (Abtast-Theorem von Shannon)

Gegeben sei eine stetige, quadratintegrierbare Funktion

$$f \in L^1 \cap L^2$$

mit endlicher Bandbreite, d.h. die Fouriertransformation $\hat{f} \in L^2$ habe kompakten Träger, o.E.

$$\text{supp } \hat{f} \subset [-\pi, \pi].$$

Dann ist die Funktion bereits durch die Folge $(f(n))_{n \in \mathbf{Z}}$ ihrer Funktionswerte bestimmt, es gilt punktweise

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit

$$\chi: \mathbf{R} \longrightarrow [0, 1]$$

die charakteristische Funktion des Intervalles $[-\pi, \pi]$ im Frequenzbereich. Hier gilt nach Voraussetzung

$$\hat{f} = \hat{f} \cdot \chi.$$

Wegen der Integrierbarkeit von f ist die Fourier-Transformierte \hat{f} stetig (Lemma 4.5). Wegen

$$\hat{f}(-\pi) = \hat{f}(\pi) = 0$$

können wir die Einschränkung

$$\hat{f}|_{[-\pi, \pi]}$$

zu einer periodischen stetigen Funktion F auf \mathbf{R} fortsetzen. Sie hat nach Korollar 3.11 die Fourier-Reihe

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n[F] e^{inx}$$

mit Fourier-Koeffizienten

$$c_n[F] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) e^{-in\omega} d\omega.$$

Nach dem Umkehrsatz 4.15 gilt

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(t) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{i\omega t} d\omega.$$

Diese Gleichheit der Funktionswerte gilt zunächst bis auf eine Nullmenge. Da beide Seiten jedoch stetige Funktionen sind, stimmen sie punktweise überein, insbesondere gilt

$$c_n[F] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(-n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Auf die Gleichung

$$\hat{f} = \hat{f} \cdot \chi = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(-n) e_{-in} \right) \chi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) (e_{-in} \cdot \chi)$$

wenden wir die Fourier-Transformation an. Einerseits gilt

$$\hat{\hat{f}}(t) = f(-t).$$

Andererseits fassen wir die beiden Funktionen

$$e_{-in} \text{ und } \chi$$

nach Bemerkung 5.6 als temperierte Funktionen auf und berechnen nach Satz 7.3, Teil ii), Lemma 6.7 und Lemma 7.8:

$$(e_{-in} \cdot \chi)^\wedge = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{e}_{-in} * \hat{\chi} = \delta_{-n} * \hat{\chi} = \tau_{-n} \hat{\chi}.$$

Überträgt man Beispiel 4.6 auf das Intervall $[-\pi, \pi]$, so gilt:

$$\hat{\chi}(x) = \sqrt{2\pi} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$f(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \sqrt{2\pi} \frac{\sin(\pi(t+n))}{\pi(t+n)},$$

also

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}, \quad \text{QED.}$$

7.11 Bemerkung (Abtastdistanz)

Falls die Fourier-Transformierte ihren Träger im Intervall

$$[-\Omega, \Omega], \quad \Omega \in \mathbb{N},$$

hat, gilt analog zu Satz 7.10

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{\pi}{\Omega} n\right) \frac{\sin(\Omega t - \pi n)}{\Omega t - \pi n}.$$

Bei einem größeren Frequenzbereich muß also die Abtastdistanz um den Faktor $\alpha := \frac{\pi}{\Omega}$ verringert werden.

Beweis. Wir reduzieren die Behauptung durch Skalierung auf Satz 7.10. Wir betrachten die skalierte Funktion

$$g := \alpha (\theta_{\alpha^{-1}} f).$$

Ihre Fourier-Transformation lautet nach Lemma 4.7

$$\hat{g} = \alpha \frac{1}{\alpha} (\theta_{\alpha} \hat{f}) = \theta_{\alpha} \hat{f}$$

und hat kompakten Träger

$$\text{supp } \hat{g} \subset [-\pi, \pi].$$

Wir wenden Satz 7.10 auf die Funktion g an der Stelle $s \in \mathbf{R}$ an und erhalten

$$f(\alpha s) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(\alpha n) \frac{\sin(\pi(s-n))}{\pi(s-n)},$$

bzw. mit

$$t := \alpha s$$

die Behauptung

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(\alpha n) \frac{\sin(\Omega t - \pi n)}{\Omega t - \pi n}, \text{ QED.}$$

Als direkte Folgerung aus der Poisson-Formel und der Faltungsformel läßt sich eine anschauliche Darstellung des Abtastvorganges in Satz 7.10 geben.

7.12 Bemerkung (Abtastung)

Zu einer gegebenen Signalfunktion f nennt man die temperierte Distribution

$$f_s := f \cdot \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n$$

die *Abtastung* (Sampling) von f . Durch Fourier-Transformation erhält man mit der Faltungsformel (Satz 7.9) unter etwas allgemeineren Voraussetzungen, der Poisson-Formel (Folgerung 6.10) und Lemma 7.8

$$\hat{f}_s := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} * \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n \right)^\wedge = \hat{f} * \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_{2\pi n} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \tau_{2\pi n} \hat{f},$$

d.h.

$$\hat{f}_s(\omega) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(\omega - 2\pi n).$$

Falls f bandbeschränkt im Intervall $[-\pi, \pi]$ ist, gilt

$$\hat{f} = \hat{f}_s \cdot \chi.$$

Hieraus folgt, da die Funktion $\hat{\chi}$ gerade ist,

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_s * \hat{\chi},$$

d.h. man kann die bandbeschränkte Funktion f aus ihrer Abtastung f_s gewinnen.

8 Kontinuierliche Wavelet-Transformation

In diesem Kapitel beginnen wir mit der Wavelet-Theorie. Die Wavelet-Transformation kann in Analogie zur Fourier-Transformation gesehen werden. In beiden Fällen werden 1-dimensionale zeitliche Signale $f(t)$ in ihr Frequenzspektrum zerlegt. Diese Zerlegung geschieht ohne Informationsverlust, so daß sich das Ausgangssignal aus seinem Frequenzspektrum wieder zurückgewinnen läßt.

Die Fourier-Transformation liefert die Frequenzanalyse $\hat{f}(\omega)$ ohne Information über den genauen Zeitpunkt, zu dem die einzelnen Frequenzen auftreten. Dennoch enthält die Fourier-Transformierte die volle Information, denn mit Hilfe der inversen Fourier-Transformation kann man das Signal gemäß dem Umkehrsatz ja wieder rekonstruieren.

Eine Wavelet-Transformation liefert die Information besser voneinander abgegrenzt: Man erhält sowohl die Frequenzanalyse als auch die Zeitpunkte des Auftretens der einzelnen Frequenzen. Folgendes Beispiel illustriert den Sachverhalt: Der Komponist bringt die Musik in Form einer Wavelet-Transformation (Partitur) auf das 2-dimensionalen Notenpapier, das Orchester macht daraus in einer inversen Wavelet-Transformation hörbare Musik.

Zwischen beiden Arten der Signaltransformation steht die von D. Gabor eingeführte "gefensterte" Fourier-Transformation, die zu jedem Zeitpunkt nur ein kleines Zeitfenster des Signals betrachtet und für diesen Ausschnitt eine Fourier-Analyse durchführt. Unter einem Zeitfenster verstehen wir dabei eine auf der Zeitachse definierte Funktion, die nur in einer kleinen Umgebung von $t = 0$ von Null verschieden ist.

Nach der Definition der Wavelet-Transformation stellt die Umkehrformel für die Wavelet-Transformation (Satz 8.11) das Hauptresultat dieses Kapitels dar.

8.1 Algorithmus (Gefensterte Fourier-Transformation)

Input. Signal f , Zeitfenster ψ .

Output. Familie von Fourier-Transformierten $\hat{f}_{\psi,b}$ zu zeitverschobenen Zeitfenstern

$$\tau_b\psi, b \in \mathbf{R}.$$

Für jeden Zeitpunkt $b \in \mathbf{R}$	
	Bilde Fourier-Transformation des Zeitfensters bei b $\hat{f}_{\psi,b}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(t) \cdot \overline{\psi(t-b)} \cdot e^{-i\omega t} dt$

Abbildung 2 Gefensterte Fourier-Transformation

8.2 Algorithmus (Wavelet-Transformation)

Input. Signal f , Zeitfenster ψ .

Output. Familie von Wavelet-Tranformierten von f zu skalierten und zeitverschobenen Zeitfenstern

$$\frac{1}{\sqrt{|a|}} \tau_b(\theta_a \psi), (a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}.$$

Für jeden Zeitpunkt $b \in \mathbf{R}$ und Skalenparameter $a \in \mathbf{R}^*$	
	Bilde Wavelet-Transformation $W[f](a, b) \propto \frac{1}{\sqrt{ a }} \int_{\mathbf{R}} f(t) (\tau_b \theta_a \bar{\psi})(t) dt$

Abbildung 3 Wavelet-Transformation

8.3 Bemerkung (Gefensterter Fourier-Transformation versus Wavelet-Transformation)

Bei der gefensterter Fourier-Transformation erfaßt jede Abtastfunktion

$$t \mapsto \bar{\psi}(t - b) \cdot e^{-i\omega t}$$

ein Fenster der **festen** Größe

$$\text{supp } \psi$$

um den Zeitpunkt b und überstreicht dieses Fenster mit harmonischen Schwingungen der **variablen** Frequenzen ω .

Bei der Wavelet-Transformation erfaßt jede Abtastfunktion

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{|a|}} (\tau_b \theta_a \bar{\psi})(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \bar{\psi}\left(\frac{t - b}{a}\right)$$

ein Fenster der **variablen** Größe

$$\frac{1}{a} \text{supp}(\psi)$$

um den Zeitpunkt b und überstreicht dieses Fenster mit **einer** Schwingung des skalierten Wavelets ("kleine Welle") $\theta_a \bar{\psi}$.

8.4 Schreibweise (Wavelet)

Für die Komposition der Operationen Translation, Skalierung und Normierung bei einer Funktion

$$\psi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$$

führen wir die Schreibweise

$$\Psi_{b,a} := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \tau_b \theta_a \Psi,$$

ein. Es gilt also

$$\Psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Der Faktor $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ stellt sicher, daß Ψ und $\Psi_{b,a}$ dieselbe L^2 -Norm haben.

8.5 Definition (Wavelet und Wavelet-Transformation)

Ein *Wavelet* ist eine quadrat-integrierbare Funktion

$$\Psi \in L^2,$$

deren Fourier-Transformation $\hat{\Psi}$ sogar logarithmisch quadrat-integrierbar ist, d.h.

$$0 < c_\Psi := 2\pi \int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (\text{Zulässigkeitsbedingung}).$$

Die *Wavelet-Transformation* einer quadrat-integrierbaren Funktion $f \in L^2$ mit dem Wavelet Ψ ist die Funktion

$$W_\Psi[f]: \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}, \quad W_\Psi[f](a, b) := \frac{1}{\sqrt{c_\Psi}} \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{\Psi_{b,a}(t)} dt.$$

Die Wavelet-Transformation einer Funktion sollte in Analogie zur Fourier-Transformation in Definition 4.2 gesehen werden. Ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Transformationen ist die Tatsache, daß die Wavelet-Transformierte eine Funktion zweier Veränderlicher ist.

8.6 Lemma (Wavelet-Transformation als Faltung)

Für jeden festen Skalenfaktor $a \in \mathbf{R}^*$ ist die Wavelet-Transformation bezüglich der zeitlichen Translation eine Faltung:

$$W_\Psi[f](a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a| c_\Psi}} (f * \theta_{-a} \overline{\Psi})(b).$$

Ihre Fourier-Transformation bzgl. des Argumentes b hat die Gestalt

$$(W_\Psi[f])^\wedge(a, \omega) = \sqrt{\frac{2\pi|a|}{c_\Psi}} \hat{f}(\omega) \cdot \overline{\Psi}^\wedge(-a\omega).$$

Als Fourier-Transformation der L^1 -Funktion $\hat{f} \bar{\psi}^\wedge$ ist für jedes feste $a \in \mathbf{R}^*$ die Funktion

$$b \mapsto W_\psi[f](a, b)$$

stetig und erfüllt

$$\lim_{b \rightarrow +/\infty} W_\psi[f](a, b) = 0.$$

Beweis. ad i)

$$\begin{aligned} W_\psi[f](a, b) &= \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{\mathbf{R}} f(t) \bar{\psi}_{b,a}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{|a| c_\psi}} \int_{\mathbf{R}} f(t) \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|a| c_\psi}} \int_{\mathbf{R}} f(t) (\theta_{-a} \bar{\psi})(b-t) dt = \frac{1}{\sqrt{|a| c_\psi}} (f * \theta_{-a} \bar{\psi})(b) \end{aligned}$$

ad ii) Nach Satz 7.3 folgt aus Teil i)

$$(W_\psi[f])^\wedge(a, \omega) = \sqrt{\frac{2\pi|a|}{c_\psi}} \left(\hat{f} \cdot (\theta_{(-a)^{-1}} \bar{\psi}^\wedge) \right)(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi|a|}{c_\psi}} \hat{f}(\omega) \cdot \bar{\psi}^\wedge(-a\omega).$$

Die letzte Aussage folgt aus Lemma 4.5, QED.

8.7 Beispiel (Haar Wavelet)

Die Haar'sche-Funktion (Definition 2.8)

$$\psi : \mathbf{R} \longrightarrow [-1, 1], \psi(t) := \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist quadrat-integrierbar. Sie hat die Fourier-Transformation

$$\hat{\psi} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \hat{\psi}(\omega) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\frac{\omega}{2}} \sin\left(\frac{\omega}{4}\right) \text{sinc}\left(\frac{\omega}{4}\right) \text{ mit } \text{sinc}(x) := \frac{\sin(x)}{x},$$

und es gilt

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} < \infty.$$

Also ist die Haar'sche Funktion ein reelles Wavelet.

Beweis. Bezeichnet $\chi = \chi_{[-1,1]}$ die charakteristische Funktion des Intervalles $[-1, 1]$, so gilt

$$\psi = \theta_{\frac{1}{4}} \tau_1 \chi - \theta_{\frac{1}{4}} \tau_3 \chi,$$

also mit Lemma 4.7

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{4} \theta_4 [(e_{-1} - e_{-3}) \hat{\chi}](\omega) = \frac{1}{4} [e^{-i\frac{\omega}{4}} - e^{-i\frac{3\omega}{4}}] \hat{\chi}\left(\frac{\omega}{4}\right).$$

Es ist

$$[e^{-i\frac{\omega}{4}} - e^{-i\frac{3\omega}{4}}] = \frac{e^{-i\frac{\omega}{4}} - e^{-i\frac{3\omega}{4}}}{e^{i\frac{\omega}{2}}} e^{i\frac{\omega}{2}} = e^{-i\frac{\omega}{2}} 2i \sin \frac{\omega}{4},$$

und nach Beispiel 4.6 gilt

$$\hat{\chi}\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sinc} \frac{\omega}{4}.$$

Die Abschätzung

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

folgt aus der Abschätzung des Integranden

$$\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} \leq \left| \frac{\sin^4(\omega)}{\omega^3} \right|,$$

der sowohl für $\omega \rightarrow 0$ also auch für $\omega \rightarrow \infty$ integrierbar ist, QED.

8.8 Bemerkung (Wavelet)

Die Fourier-Transformierte eines Wavelets $\psi \in L^1$ ist stetig (Lemma 4.5); also gilt wegen der logarithmischen Quadrat-Integrierbarkeit

$$0 = \hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt,$$

d.h. der Mittelwert des Wavelets verschwindet.

8.9 Lemma (Erzeugung von Wavelets)

Wenn die k -te Ableitung, $k \geq 1$, einer quadrat-integrierbaren Funktion ϕ existiert und wiederum quadrat-integrierbar ist, d.h.

$$\phi^{(k)} \in L^2,$$

so ist sie ein Wavelet

$$\psi := \phi^{(k)}.$$

Beweis. Für die Fourier-Transformation gilt nach Satz 4.13

$$\hat{\psi}(\omega) := (i\omega)^k \hat{\phi}(\omega).$$

Es folgt - da die Fourier-Transformation nach Satz 4.17 eine Isometrie ist -

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_{\mathbf{R}} |\omega|^{2k} \frac{|\hat{\Phi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_{-1}^1 |\omega|^{2k} \frac{|\hat{\Phi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega + \int_{|\omega| \geq 1} |\omega|^{2k} \frac{|\hat{\Phi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \leq$$

$$\int_{\mathbf{R}} |\hat{\Phi}(\omega)|^2 d\omega + \int_{|\omega| \geq 1} |\omega|^{2k} |\hat{\Phi}(\omega)|^2 d\omega = \|\hat{\Phi}\|_{L^2}^2 + \|\hat{\Phi}^{(k)}\|_{L^2}^2 = \|\Phi\|_{L^2}^2 + \|\Phi^{(k)}\|_{L^2}^2, \text{ QED.}$$

8.10 Beispiel (Wavelet Mexikaner-Hut)

Die Funktion

$$\psi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \psi(t) := -\gamma \frac{d^2}{dt^2} \left(e^{-\frac{t^2}{2}} \right) = \gamma (1-t^2) e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ mit } \gamma := \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}},$$

heißt *Mexikaner-Hut*. Sie ist durch den Faktor γ so normiert, daß

$$\|\psi\|_{L^2} = 1.$$

Ihre Fourier-Transformation berechnet sich nach Satz 4.13 und Beispiel 4.4 als

$$\hat{\psi}(\omega) = \gamma \omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

mit der Zulässigkeitsbedingung

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \gamma^2 \int_{\mathbf{R}} |\omega|^3 e^{-\omega^2} d\omega = 2\gamma^2 \int_0^\infty \omega^3 e^{-\omega^2} d\omega = 2\gamma^2 \int_0^\infty \omega^2 (\omega e^{-\omega^2}) d\omega =$$

$$2\gamma^2 \left[\frac{-\omega^2 e^{-\omega^2}}{2} \right]_0^\infty + 2\gamma^2 \int_0^\infty \omega e^{-\omega^2} d\omega = \gamma^2 \left[-e^{-\frac{\omega^2}{2}} \right]_0^\infty = \gamma^2.$$

Also ist der Mexikaner-Hut ein reelles Wavelet.

Beim Beweis der Isometrie-Eigenschaft und der Umkehrformel für die Wavelet-Transformation benötigen wir, daß das Wavelet die Zulässigkeitsbedingung erfüllt.

8.11 Satz (Wavelet-Transformation als Isometrie)

Für ein Wavelet $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ ist die Wavelet-Transformation

$$\mathbb{W}_\psi : L^2(\mathbf{R}) \longrightarrow L^2\left(\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}, \frac{da db}{a^2}\right)$$

eine Isometrie.

Beweis. Wir setzen Zur Abkürzung für die beiden Hilbert-Räume

$$X := L^2(\mathbf{R}) \text{ und } Y := L^2\left(\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}, \frac{da db}{a^2}\right).$$

Wir berechnen die Norm des Bildes, indem wir auf die zweite Veränderliche die Fourier-Transformation anwenden und ausnutzen, daß diese eine Isometrie ist (Satz 4.17). Außerdem wenden wir Lemma 8.6 an und die Gleichheit (Bemerkung 4.3)

$$\widehat{\bar{\psi}}(-a \omega) = \widehat{\psi}(a \omega).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \|\mathcal{W}_\psi[f]\|_Y^2 &= \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |\mathcal{W}_\psi[f](a,b)|^2 db \right) \frac{da}{a^2} = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |\widehat{\mathcal{W}_\psi[f]}(a,\omega)|^2 d\omega \right) \frac{da}{a^2} = \\ &= \frac{2\pi}{c_\psi} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} a \left| \widehat{\bar{\psi}}(-a \omega) \right|^2 \left| \hat{f}(\omega) \right|^2 d\omega \right) \frac{da}{a^2} = \frac{2\pi}{c_\psi} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} a \left| \widehat{\psi}(a \omega) \right|^2 \frac{da}{a^2} \right) \left| \hat{f}(\omega) \right|^2 d\omega = \\ &= \frac{2\pi}{c_\psi} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{\psi}(\tau)|^2}{|\tau|} d\tau \right) \left| \hat{f}(\omega) \right|^2 d\omega = \\ &= \frac{2\pi}{c_\psi} \int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{\psi}(-\tau)|^2}{|\tau|} d\tau \int_{\mathbf{R}} \left| \hat{f}(\omega) \right|^2 d\omega = \|\hat{f}\|_X^2 = \|f\|_X^2, \text{ QED.} \end{aligned}$$

8.12 Satz (Umkehrformel der Wavelet-Transformation)

Für die Wavelet-Transformation

$$\mathcal{W}_\psi : L^2(\mathbf{R}) \longrightarrow L^2\left(\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}, \frac{da db}{a^2}\right)$$

mit einem Wavelet $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ gilt die Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}} \mathcal{W}_\psi[f](a,b) \psi_{b,a}(t) \frac{da db}{a^2} \text{ für alle } f \in L^2(\mathbf{R}).$$

Beweis. Der folgende Beweis beruht auf der Formel von Calderon. Wir setzen

$$F(t) := \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{\mathbf{R}^2} \mathcal{W}_\psi[f](a,b) \psi_{b,a}(t) \frac{da db}{a^2}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} F(t) &:= \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} \mathcal{W}_\psi[f](a,b) (\theta_a \psi)(t-b) db \right) \frac{da}{a^2 \sqrt{|a|}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{\mathbf{R}} \left(\mathcal{W}_\psi[f](a,-) * (\theta_a \psi) \right)(t) \frac{da}{\sqrt{|a|} a^2} = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbf{R}} \left(f * (\theta_{-a} \bar{\psi}) * (\theta_a \psi) \right)(t) \frac{da}{|a| a^2} \end{aligned}$$

Anwendung des Faltungssatzes 7.3 und der Formel aus Bemerkung 4.3

$$\widehat{\bar{\psi}}(-a t) = \widehat{\psi}(a t)$$

liefert

$$\hat{F}(t) = \hat{f}(t) \frac{2\pi}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}} |a|^2 \left(\theta_{-a^{-1}} \overline{\hat{\psi}} \right) \cdot \left(\theta_{a^{-1}} \hat{\psi} \right)(t) \frac{da}{|a|a^2} = \hat{f}(t) \frac{2\pi}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}} |a|^2 \overline{\hat{\psi}}(-a t) \hat{\psi}(a t) \frac{da}{|a|a^2} =$$

$$\hat{f}(t) \frac{2\pi}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(a t)|^2 \frac{da}{|a|} = \hat{f}(t) \frac{2\pi}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \hat{f}(t).$$

Da die Fourier-Transformation ein Isomorphismus ist (Satz 4.17), folgt

$$F = f, \text{ QED.}$$

9 Gibbsches Phänomen

10 Schnelle Fourier-Transformation

11 Fouriertheorie und Quantencomputing

12 Bildkompression

13 Wavelet-Frame

Die Wavelet-Transformation transformiert eine Funktion einer Veränderlichen $f(t)$ in eine Funktion zweier Veränderlichen $W_\psi[f](a, b)$. Aus dieser läßt sich nach Satz 8.12 das Ausgangssignal zurückgewinnen. Somit enthält die Wavelet-Transformierte viel redundante Information. In diesem Kapitel geht es darum, diese Redundanz zu verringern. Wir werden in (Satz 13.10) ein Resultat von der Art des Abtast-Theorem von Shannon beweisen: Unter geeigneten Voraussetzungen enthält bereits eine diskrete Folge

$$(a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$$

von Skalierungsparametern a und zugehörigen Translationen b die vollständige Information eines beliebigen Signals.

13.1 Definition (Skalierungs- und Translationsparametern)

i) Wir wählen einen festen *Zoom-Faktor*

$$a > 1$$

und betrachten als Folge von Skalierungsparametern die Potenzen

$$a_k := a^k, k \in \mathbf{Z}.$$

Außerdem wählen wir eine feste *Translations-Distanz*

$$b > 0$$

und betrachten zu jedem festen Skalierungsparameter $a_k, k \in \mathbf{Z}$, die Folge von Translationen

$$b_{k,m} := m \cdot b \cdot a_k, m \in \mathbf{Z}.$$

deren Länge ein Vielfaches von

$$b \cdot a_k$$

ist. Durch die Abhängigkeit von a_k wird sichergestellt, daß die Translationsschritte zu verschiedenen Skalierungen ineinander enthalten sind.

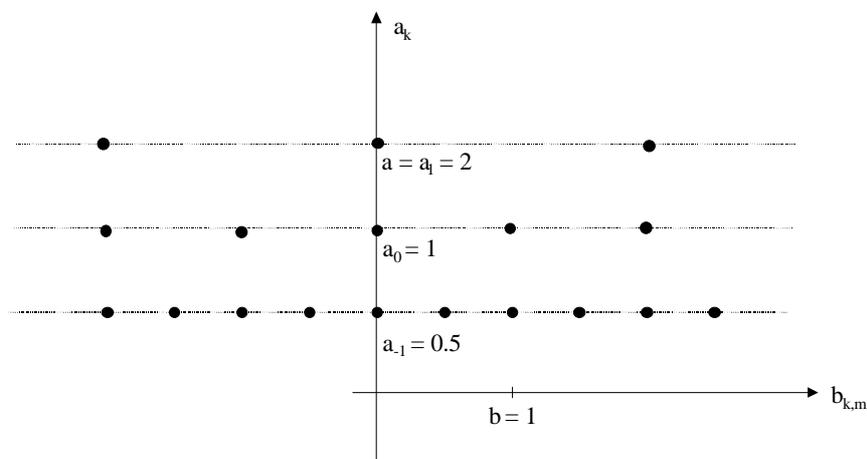


Abbildung 4 Gitter zum Wavelet-Sampling mit $a=2, b=1$

ii) Für ein Wavelet ψ setzen wir unter Verwendung von Schreibweise 8.4 zur Abkürzung

$$\Psi_{k,m} := \Psi_{b_{k,m}, a_k}, (k, m) \in \mathbf{Z}^2,$$

also

$$\begin{aligned} \Psi_{k,m}(t) &= \frac{1}{\sqrt{a_k}} \left(\tau_{b_{k,m}} \theta_{a_k} \psi \right)(t) = \frac{1}{\sqrt{a^k}} \psi \left(\frac{t - m b a_k}{a_k} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_k}} \psi(a_k^{-1} t - m b), (k, m) \in \mathbf{Z}^2. \end{aligned}$$

Nach der Umkehrformel (Satz 8.11) kann man jede Funktion aus ihrer Wavelet-Transformation rekonstruieren.

13.2 Bemerkung (Anforderung an die diskrete Wavelet-Transformation)

i) Welche Voraussetzungen müssen ein Wavelet ψ , der Zoom-Faktor a und die Translations-Distanz b erfüllen, damit die Wavelet-Transformation einer beliebigen Funktion $f \in L^2$ bereits durch die Folge ihrer Wavelet-Koeffizienten

$$\left(W_\psi[f](a_m, b_{m,n}) \right)_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2}$$

festgelegt ist? Wann läßt sich in diesem Falle das Ausgangssignal stetig aus seinen Wavelet-Koeffizienten rekonstruieren?

ii) Um diese Frage zu formalisieren, fassen wir die Wavelet-Transformation mit ψ als ein Skalarprodukt im Hilbert-Raum $L^2(\mathbf{R})$ auf:

$$W_\psi[f](a, b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{\psi_{b,a}(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \langle f, \psi_{b,a} \rangle$$

und betrachten für einen festen Zoom-Faktor a und eine feste Translations-Distanz b die hierdurch definierte lineare Abbildung

$$T: L^2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{Z}^2}, T(f) := \left(\langle f, \psi_{m,n} \rangle \right)_{m,n \in \mathbf{Z}^2}.$$

Dann heißen die in Teil i) formulierten Fragen: Unter welchen Voraussetzungen liegt das Bild dieser Abbildung im Hilbert-Raum $l^2(\mathbf{Z}^2)$, wann ist T eine stetige Abbildung zwischen Hilbert-Räumen und wann ist die Abbildung injektiv mit stetiger Umkehrung?

13.3 Beispiel (Haar Wavelet)

Nach Satz 2.9 ist die aus dem Haar'schen Wavelet ψ mit Zoom-Faktor $a = 2$ und Translations-Distanz $b = 1$ abgeleitete Folge

$$\left(\psi_{m,n} \right)_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2},$$

eine Hilbert-Basis des Hilbertraumes $L^2(\mathbf{R})$. Insbesondere gilt für alle $f \in L^2(\mathbf{R})$

$$f = \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}.$$

Nach der Parseval'schen Gleichung (Korollar 1.9)

$$\|f\|^2 = \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2$$

ist die Abbildung

$$T: L^2(\mathbf{R}) \longrightarrow l^2(\mathbf{Z}^2), T(f) := (\langle f, \psi_{m,n} \rangle)_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2}$$

ein isometrischer Isomorphismus von Hilbert-Räumen, insbesondere also stetig mit stetiger Umkehrabbildung.

Dieses Beispiel wird im folgenden verallgemeinert. Zunächst wird die Parseval'sche Gleichung für eine Hilbert-Basis zu einer Abschätzung für einen Frame verallgemeinert.

13.4 Definition (Frame)

Eine Folge $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen eines Hilbert-Raumes X heißt ein *Frame* von X , wenn es Konstanten

$$0 < A \leq B$$

gibt, so daß für alle $x \in X$ gilt:

$$A \|x\|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq B \|x\|^2.$$

Man nennt A und B ein Paar von *Frame-Konstanten*. Falls man $A = B$ wählen kann, so heißt der Frame *straff*.

13.5 Bemerkung (Frame)

i) Jeder Frame eines Hilbert-Raumes X ist ein Erzeugendensystem, d.h. für einen Frame $(x_i)_{i \in I}$ gilt

$$\overline{\text{span} \langle x_i : i \in I \rangle} = X.$$

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß der Orthogonalraum nur aus dem Nullvektor besteht, d.h.

$$\langle y, x_i \rangle = 0 \text{ für alle } i \in I \Rightarrow y = 0.$$

Diese Aussage folgt aus der linken Seite der Frame-Abschätzung wegen $0 < A$:

$$A \|y\|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle y, x_i \rangle|^2, \text{ QED.}$$

ii) Jede Hilbert-Basis $(x_i)_{i \in I}$ ist ein straffer Frame mit Frame-Konstanten

$$A = B = 1$$

wegen der Parseval-Gleichung (Korollar 1.9)

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2.$$

Wir erinnern an die Berechnung der Norm in einem Hilbert-Raum, insbesondere für beschränkte, symmetrische Operatoren.

13.6 Lemma (Norm in einem Hilbert-Raum)

i) In einem Hilbert-Raum X kann man die Norm eines Elementes $x \in X$ berechnen als

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y \rangle|.$$

ii) Für eine lineare stetige Abbildung zwischen zwei Hilbert-Räumen

$$f: X \rightarrow Y$$

existiert die *Operator-Norm*

$$\|f\| := \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| < \infty$$

und berechnet sich als

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} |\langle f(x), y \rangle|.$$

Wenn f zusätzlich symmetrisch ist, d.h.

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \text{ für alle } x \in X, y \in Y,$$

so gilt bereits

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle f(x), x \rangle|.$$

Beweis. ad ii) vgl. [Heu1986], Satz 29.5.

13.7 Satz (Frame-Operator)

Ein Frame $(x_i)_{i \in I}$ in einem Hilbert-Raum X mit Frame-Konstanten A und B definiert eine lineare Abbildung

$$T: X \longrightarrow l^2(I), T(x) = (\langle x, x_i \rangle)_{i \in I}.$$

i) Diese Abbildung ist stetig und injektiv mit Norm

$$\|T\| \leq \sqrt{B}.$$

Die Umkehrabbildung

$$T^{-1}: T(X) \longrightarrow X$$

ist ebenfalls stetig mit Norm

$$\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

ii) Bezeichnet

$$T^*: l^2(I) \longrightarrow X,$$

den adjungierten Operator und wählt man speziell

$$B := \|T\|^2 \text{ und } A := \frac{1}{\|T^{-1}\|^2},$$

so hat der *Frame-Operator*

$$S := \frac{2}{A+B}(T^* \circ T): X \longrightarrow X$$

des Frames folgende Eigenschaften:

- Für jedes $x \in X$ berechnet sich

$$S(x) = \frac{2}{A+B} \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i$$

- Für den Abstand von der Identität gilt:

$$\|id - S\| \leq \frac{B-A}{A+B}.$$

- Der Frame-Operator eines straffen Frames ist die Identität

$$S = \frac{1}{A}(T^* \circ T) = id_X.$$

Beweis. ad i) Die Frame-Bedingung

$$\|T(x)\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq B \|x\|^2 < \infty$$

zeigt, daß T wohldefiniert und durch \sqrt{B} beschränkt ist. Für $x \neq 0$ folgt aus

$$0 < A \|x\|^2 \leq \|T(x)\|^2,$$

daß $T(x) \neq 0$. Also ist die lineare Abbildung T injektiv. Die Umkehrabbildung auf dem Bild

$$T^{-1}: T(X) \longrightarrow X$$

erfüllt für alle $y = T(x) \in T(X)$:

$$\|T^{-1}(y)\|^2 = \|T^{-1}(T(x))\|^2 = \|x\|^2 \leq \frac{1}{A} \|T(x)\|^2 = \frac{1}{A} \|y\|^2,$$

also ist T^{-1} durch $\frac{1}{\sqrt{A}}$ beschränkt.

ad ii) Als stetiger Operator hat T einen adjungierten Operator T^* , der durch die Eigenschaft

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle \text{ für alle } x \in X, y \in l^2(I)$$

charakterisiert ist ([HS1971], Definition 22.1). Der adjungierte Operator ist ebenfalls stetig mit gleicher Norm. O. E. sei $I = N$. Für beliebiges $x \in X$ ist die Folge

$$\left(s_N := \sum_{i=0}^N \langle x, x_i \rangle x_i \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

eine Cauchy-Folge: Für $M \geq N$ ist nach Lemma 13.6

$$\begin{aligned} \|s_N - s_M\|^2 &= \sup_{\|z\|=1} |\langle s_N - s_M, z \rangle|^2 = \sup_{\|z\|=1} \left| \sum_{i=N+1}^M \langle x, x_i \rangle \langle x_i, z \rangle \right|^2 \leq \\ &\sum_{i=N+1}^M |\langle x, x_i \rangle|^2 \sup_{\|z\|=1} \sum_{i=N+1}^M |\langle x_i, z \rangle|^2 \leq \sum_{i=N+1}^M |\langle x, x_i \rangle|^2 \cdot B. \end{aligned}$$

Da die Reihe

$$\sum_{i \in N} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq B \|x\|^2$$

konvergiert, läßt sich der Reihenrest

$$\sum_{i \in N+1}^M |\langle x, x_i \rangle|^2$$

beliebig klein abschätzen. Da der Hilbert-Raum vollständig ist, wird durch die unendliche Reihe

$$\frac{2}{A+B} \sum_{i \in N} \langle x, x_i \rangle x_i$$

ein Element von X definiert.

Andererseits ist für jedes Element $e \in X$

$$\begin{aligned} \frac{A+B}{2} \langle S(x), e \rangle &= \langle T(x), T(e) \rangle = \langle (\langle x, x_i \rangle)_i, (\langle e, x_i \rangle)_i \rangle = \\ &\sum_{i \in N} \langle x, x_i \rangle \overline{\langle e, x_i \rangle} = \sum_{i \in N} \langle x, x_i \rangle \langle x_i, e \rangle, \end{aligned}$$

also

$$S(x) = \frac{2}{A+B} \sum_{i \in N} \langle x, x_i \rangle x_i.$$

Insbesondere gilt

$$\langle S(x), x \rangle = \frac{2}{A+B} \sum_{i \in N} \langle x, x_i \rangle \langle x_i, x \rangle = \frac{2}{A+B} \sum_{i \in N} |\langle x, x_i \rangle|^2.$$

Mit den Frame-Bedingungen folgt hieraus

$$\frac{2A}{A+B} \|x\|^2 \leq \langle S(x), x \rangle \leq \frac{2B}{A+B} \|x\|^2$$

und

$$\left(1 - \frac{2B}{A+B}\right) \|x\|^2 \leq \langle (\text{id} - S)(x), x \rangle \leq \left(1 - \frac{2A}{A+B}\right) \|x\|^2,$$

also mit Lemma 13.6:

$$\|\text{id} - S\| \leq \frac{B-A}{A+B}, \text{ QED.}$$

13.8 Definition (Wavelet-Frame)

Ein Tupel (ψ, a, b) mit einem Wavelet $\psi \in L^2(\mathbf{R})$, einem Zoom-Faktor $a > 1$ und einer Translations-Distanz $b > 0$ heißt *Wavelet-Frame*, wenn die erzeugte Folge

$$(\psi_{m,n})_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2}$$

quadrat-integrierbarer Funktionen einen Frame im Hilbert-Raum $L^2(\mathbf{R})$ bildet. Ist dieser Frame straff, so spricht man von einem *straffen* Wavelet-Frame.

Man kann zeigen, daß eine beliebige quadrat-integrierbare Funktion $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ bereits dann ein Wavelet ist, d.h. zusätzlich logarithmisch quadrat-integrierbar ist, wenn das Tupel (ψ, a, b) die Frame-Bedingung von Definition 13.4 erfüllt ([LMR1998], Lemma 2.1.3). Denn dann gilt mit jedem Paar von Frame-Konstanten (A, B) :

$$A \leq \frac{\pi}{b \cdot \ln a} \int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \leq B.$$

Insbesondere definiert das Haar-Wavelet ψ einen straffen Wavelet-Frame $(\psi, 2, 1)$, der zugehörige Frame ist sogar eine Hilbert-Basis.

13.9 Lemma (Straffer Frame und Hilbert-Basis)

Für ein normiertes Wavelet $\psi \in L^2(\mathbf{R})$, d.h.

$$\|\psi\| = 1,$$

erzeugt jeder straffer Wavelet-Frame (ψ, a, b) mit Frame-Konstanten $A = B = 1$ eine Hilbert-Basis von $L^2(\mathbf{R})$.

Beweis. Jedes Element des Frames

$$\psi_{m,n} := \frac{1}{\sqrt{a_m}} \tau_{b_{m,n}} \theta_{a_m} \psi \in L^2(\mathbf{R}), (m, n) \in \mathbf{Z}^2,$$

hat dieselbe L^2 -Norm wie ψ , also sind auch alle Elemente des Frames auf die Länge 1 normiert. Zum Nachweis der Orthogonalität berechnen wir für ein gegebenes Frame-Mitglied

$$\varphi := \psi_{m,n}$$

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2 &= \sum_{(k,l)} |\langle \varphi, \psi_{k,l} \rangle|^2 = |\langle \varphi, \varphi \rangle|^2 + \sum_{(k,l) \neq (m,n)} |\langle \varphi, \psi_{k,l} \rangle|^2 = \\ &= \|\varphi\|^2 + \sum_{(k,l) \neq (m,n)} |\langle \varphi, \psi_{k,l} \rangle|^2. \end{aligned}$$

Die Aussage

$$0 = \sum_{(k,l) \neq (m,n)} |\langle \varphi, \psi_{k,l} \rangle|^2$$

liefert die Orthogonalität des Frames. Die Frame-Bedingung folgt aus der Parseval'schen Gleichung

$$\|f\|^2 = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2,$$

und damit ist der Frame auch vollständig, d.h. für alle $f \in L^2(\mathbf{R})$ gilt

$$f = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}, \text{ QED.}$$

Der folgende Satz 13.10 zeigt, unter welchen Voraussetzungen ein Wavelet ψ bei einem geeigneten Zoom-Parameter a für verschiedene Translations-Distanzen b einen Wavelet-Frame (ψ, a, b) bildet.

13.10 Satz (Wavelet-Frame)

Gegeben sei ein Wavelet ψ und ein Zoom-Faktor $a > 1$. Wir setzen voraus:

$$0 < m(\psi, a) := \inf_{|\omega| \in [1, a]} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_m \omega)|^2, \quad M(\psi, a) := \sup_{|\omega| \in [1, a]} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_m \omega)|^2 < \infty.$$

i) Es gebe Konstanten $K, \alpha > 0$, so daß

$$\beta(s) := \sup_{|\omega| \in [1, a]} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_m \omega)| \cdot |\hat{\psi}(a_m \omega + s)|$$

gleichmäßig in $s \in \mathbf{R}$ die Abschätzung

$$\beta(s) \leq K \left(\frac{1}{1+s^2} \right)^{\frac{1}{2} + \alpha}$$

erfüllt. Dann existiert eine Schranke $b_{\max} > 0$, so daß für alle Translations-Distanzen

$$0 < b < b_{\max}$$

das Tupel (ψ, a, b) ein Wavelet-Frame ist.

ii) Im Falle $a = 2$ (Verdopplung) ist $(\psi, 2, b)$ ein Wavelet-Frame, wenn die Translations-Distanz b die Abschätzung

$$m(\psi, 2) > 2 \sum_{l=0}^{\infty} \left(\beta_1 \left(\frac{2\pi}{b} (2l+1) \right) \cdot \beta_1 \left(-\frac{2\pi}{b} (2l+1) \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

mit

$$\beta_1(s) := \sup_{\omega \in [1,2]} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{\psi}(2^{m+n} \omega) \bar{\hat{\psi}}(2^n (2^m \omega + s)) \right| < \infty$$

erfüllt. In diesem Fall gelten für jedes Paar von Frame-Konstanten (A, B) die Abschätzungen

$$\frac{2\pi}{b} \left[m(\psi, 2) - 2 \sum_{l=0}^{\infty} \left(\beta_1 \left(\frac{2\pi}{b} (2l+1) \right) \cdot \beta_1 \left(-\frac{2\pi}{b} (2l+1) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq A$$

$$B \leq \frac{2\pi}{b} \left[M(\psi, 2) + 2 \sum_{l=0}^{\infty} \left(\beta_1 \left(\frac{2\pi}{b} (2l+1) \right) \cdot \beta_1 \left(-\frac{2\pi}{b} (2l+1) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Beweis. ad i)

1. Wir berechnen für eine gegebene Funktion $f \in L^2$ unter Benutzung der Isometrie-Eigenschaft der Fourier-Transformation (Satz 4.17)

$$\begin{aligned} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 &= |\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{m,n} \rangle|^2 = \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{m,n} \rangle \cdot \langle \hat{\psi}_{m,n}, \hat{f} \rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) \bar{\hat{\psi}}_{m,n}(y) dy \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}_{m,n}(\omega) \bar{\hat{f}}(\omega) d\omega \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.7 gilt

$$\hat{\psi}_{m,n}(\omega) = \sqrt{a_m} e^{-ib_{m,n}\omega} \cdot \hat{\psi}(a_m \omega)$$

und

$$\bar{\hat{\psi}}_{m,n}(y) = \sqrt{a_m} e^{ib_{m,n}y} \cdot \bar{\hat{\psi}}(a_m y).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 &= \\ &= a_m \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) \bar{\hat{\psi}}(a_m y) \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(a_m \omega) \bar{\hat{f}}(\omega) e^{ib_{m,n}(y-\omega)} d\omega \right) dy = \\ &= a_m \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) \bar{\hat{\psi}}(a_m y) \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(a_m(y-z)) \bar{\hat{f}}(y-z) e^{inb a_m z} dz \right) dy \end{aligned}$$

Wir verwenden Satz 6.9 - nach Anwendung der Skalierung $\theta_{\rho^{-1}}$, $\rho = b a_m$, -

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\rho z} = \frac{2\pi}{\rho} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{2\pi k}{\rho}}$$

Also

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_m \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) \bar{\hat{\psi}}(a_m y) \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(a_m(y-z)) \bar{\hat{f}}(y-z) e^{inba_m z} dz \right) dy = \\ &= \frac{2\pi}{b} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) \bar{\hat{\psi}}(a_m y) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(a_m y - \frac{2\pi}{b}k) \bar{\hat{f}}(y - \frac{2\pi}{b}k) \right) dy. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 = \frac{2\pi}{b} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}_R} \int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{\psi}}(a_m y) \hat{\psi}(a_m y - \frac{2\pi}{b}k) \hat{f}(y) \bar{\hat{f}}(y - \frac{2\pi}{b}k) dy.$$

2. Der Summand für $k = 0$ ist

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(a_m y)|^2 |\hat{f}(y)|^2 dy.$$

Wir schätzen ihn ab durch

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(a_m y)|^2 |\hat{f}(y)|^2 dy &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_m y)|^2 |\hat{f}(y)|^2 dy \leq \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sup_{y \in [1,a]} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_m y)|^2 \right) |\hat{f}(y)|^2 dy = M(\psi, a) \|f\|^2 \end{aligned}$$

bzw.

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}_R} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(a_m y)|^2 |\hat{f}(y)|^2 dy \geq \int_{\mathbb{R}} \inf_{y \in [1,a]} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_m y)|^2 \right) |\hat{f}(y)|^2 dy = m(\psi, a) \|f\|^2$$

3. Die übrigen Summanden für $k \neq 0$ werden betragsmäßig abgeschätzt, indem wir die Ungleichung von Cauchy-Schwarz zunächst auf das Integral und dann auf die Summation über den Index m anwenden:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \sum_{m \in \mathbb{Z}_R} \int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{\psi}}(a_m y) \hat{\psi}(a_m y - \frac{2\pi}{b}k) \hat{f}(y) \bar{\hat{f}}(y - \frac{2\pi}{b}k) dy \right| \leq \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \sum_{m \in \mathbb{Z}_R} \int_{\mathbb{R}} \left| \bar{\hat{\psi}}(a_m y) \hat{\psi}(a_m y - \frac{2\pi}{b}k) \hat{f}(y) \bar{\hat{f}}(y - \frac{2\pi}{b}k) \right| dy = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \sum_{m \in \mathbb{Z}_R} \int_{\mathbb{R}} \left| \bar{\hat{\psi}}(a_m y) \hat{\psi}(a_m y - \frac{2\pi}{b}k) \right|^{\frac{1}{2}} |\hat{f}(y)| \left| \bar{\hat{\psi}}(a_m y) \hat{\psi}(a_m y - \frac{2\pi}{b}k) \right|^{\frac{1}{2}} |\bar{\hat{f}}(y - \frac{2\pi}{b}k)| dy \leq \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left[\left(\sum_{m \in \mathbb{Z}_R} \int_{\mathbb{R}} \left| \bar{\hat{\psi}}(a_m y) \hat{\psi}(a_m y - \frac{2\pi}{b}k) \right|^2 |\hat{f}(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

$$\left(\sum_{m \in \mathbb{Z}_R} \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{\psi}(a_m z) \bar{\hat{\psi}}(a_m z + \frac{2\pi}{b}k) \right| \left| \hat{f}(z) \right|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dabei haben wir im zweiten Integral bei festem (k, m) die Substitution

$$z = y - \frac{2\pi}{b}k$$

vorgenommen. Bei der äußeren Summation über den Index k schätzen wir jeden Summanden ab

$$\begin{aligned} & \sum_{m \in \mathbb{Z}_R} \int_{\mathbb{R}} \left| \bar{\hat{\psi}}(a_m y) \hat{\psi}(a_m y - \frac{2\pi}{b}k) \right| \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy = \\ & \int_{\mathbb{R}} \sum_{m \in \mathbb{Z}_R} \left| \bar{\hat{\psi}}(a_m y) \hat{\psi}(a_m y - \frac{2\pi}{b}k) \right| \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy \leq \int_{\mathbb{R}} \sup_{y \in [1, a]} \sum_{m \in \mathbb{Z}_R} \left| \bar{\hat{\psi}}(a_m y) \hat{\psi}(a_m y - \frac{2\pi}{b}k) \right| \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy \leq \\ & \beta \left(-\frac{2\pi}{b}k \right) \|f\|^2 \end{aligned}$$

und analog

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}_R} \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{\psi}(a_m y) \bar{\hat{\psi}}(a_m y + \frac{2\pi}{b}k) \right| \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy \leq \beta \left(\frac{2\pi}{b}k \right) \|f\|^2.$$

Zusammen also

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left[\left(\sum_{m \in \mathbb{Z}_R} \int_{\mathbb{R}} \left| \bar{\hat{\psi}}(a_m y) \hat{\psi}(a_m y - \frac{2\pi}{b}k) \right| \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}_R} \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{\psi}(a_m z) \bar{\hat{\psi}}(a_m z + \frac{2\pi}{b}k) \right| \left| \hat{f}(z) \right|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \\ & \|f\|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left(\beta \left(-\frac{2\pi}{b}k \right) \beta \left(\frac{2\pi}{b}k \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left(\beta \left(-\frac{2\pi}{b}k \right) \beta \left(\frac{2\pi}{b}k \right) \right)^{\frac{1}{2}} =: C(b).$$

4. Wegen

$$\lim_{b \rightarrow 0} C(b) = 0.$$

existiert eine Konstante $b_{\max} > 0$ mit

$$m(\psi, a) - C(b) > 0 \text{ für alle } 0 < b < b_{\max}.$$

Für jede dieser Translation-Distanzen b ist (ψ, a, b) ein Wavelet-Frame mit

$$\frac{2\pi}{b} (m(\psi, a) - C(b)) \|f\|^2 \leq \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq \frac{2\pi}{b} (M(\psi, a) + C(b)) \|f\|^2.$$

ad ii) Wir schätzen die in obigem Beweis, Teil 3 auftretende Summe

$$S := \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} dy \bar{\psi}(2^m y) \psi(2^m y - \frac{2\pi}{b} k) \hat{f}(y) \bar{\hat{f}}(y - \frac{2\pi}{b} 2^{-m} k) \right|$$

schärfer ab: Jeder Summationsindex $k \in \mathbb{Z}^*$ läßt sich eindeutig zerlegen in ein Produkt

$$k = 2^n j \text{ mit } n \in \mathbb{N} \text{ und ungeradem } j \in \mathbb{Z}.$$

Bei der Summation

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \dots = \sum_{j \text{ ungerade}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \dots$$

substituieren wir

$$m = n + 1$$

und erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned} S &= \left| \sum_{\text{ungerade}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}(2^{n+1} y) \psi \left(2^n \left(2^l y - \frac{2\pi}{b} j \right) \right) \hat{f}(y) \bar{\hat{f}} \left(y - \frac{2\pi}{b} 2^{-1} j \right) dy \right| \leq \\ & \sum_{\text{ungerade}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{\psi}(2^{n+1} y) \psi \left(2^n \left(2^l y - \frac{2\pi}{b} j \right) \right) \hat{f}(y) \bar{\hat{f}} \left(y - \frac{2\pi}{b} 2^{-1} j \right) \right| dy = \\ & \sum_{\text{ungerade}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{\psi}(2^{n+1} y) \psi \left(2^n \left(2^l y - \frac{2\pi}{b} j \right) \right) \right| \cdot \left| \hat{f}(y) \bar{\hat{f}} \left(y - \frac{2\pi}{b} 2^{-1} j \right) \right| dy = \\ & \sum_{\text{ungerade}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \left[\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{\psi}(2^{n+1} y) \psi \left(2^n \left(2^l y - \frac{2\pi}{b} j \right) \right) \right|^{\frac{1}{2}} \left| \hat{f}(y) \right| \right. \\ & \left. \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{\psi}(2^{n+1} y) \psi \left(2^n \left(2^l y - \frac{2\pi}{b} j \right) \right) \right|^{\frac{1}{2}} \left| \bar{\hat{f}} \left(y - \frac{2\pi}{b} 2^{-1} j \right) \right| \right] dy \leq \\ & \sum_{\text{ungerade}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[\left(\int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{\psi}(2^{n+1} y) \psi \left(2^n \left(2^l y - \frac{2\pi}{b} j \right) \right) \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$\left(\int_{\mathbf{R}} \left| \sum_{n \in \mathbf{N}} \hat{\psi}(2^{n+1}y) \bar{\hat{\psi}} \left(2^n \left(2^1 y + \frac{2\pi}{b} j \right) \right) \right| \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\sum_{j \text{ ungerade}} \left[\sum_{l \in \mathbf{Z}} \left(\int_{\mathbf{R}} \left| \sum_{n \in \mathbf{N}} \bar{\hat{\psi}}(2^{n+1}y) \hat{\psi} \left(2^n \left(2^1 y - \frac{2\pi}{b} j \right) \right) \right| \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \right.$$

$$\left. \sum_{l \in \mathbf{Z}} \left(\int_{\mathbf{R}} \left| \sum_{n \in \mathbf{N}} \bar{\hat{\psi}}(2^{n+1}y) \hat{\psi} \left(2^n \left(2^1 y + \frac{2\pi}{b} j \right) \right) \right| \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Wieder schätzen wir bei der äußeren Summation über $j \in \mathbf{Z}$ jeden Summanden einzeln ab:

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} \left(\int_{\mathbf{R}} \left| \sum_{n \in \mathbf{N}} \bar{\hat{\psi}}(2^{n+1}y) \hat{\psi} \left(2^n \left(2^1 y - \frac{2\pi}{b} j \right) \right) \right| \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy \right) =$$

$$\int_{\mathbf{R}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} \left| \sum_{n \in \mathbf{N}} \bar{\hat{\psi}}(2^{n+1}\omega) \hat{\psi} \left(2^n \left(2^1 \omega - \frac{2\pi}{b} j \right) \right) \right| \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy \leq$$

$$\int_{\mathbf{R}} \sup_{\omega \in [1,2]} \sum_{l \in \mathbf{Z}} \left| \sum_{n \in \mathbf{N}} \bar{\hat{\psi}}(2^{n+1}\omega) \hat{\psi} \left(2^n \left(2^1 \omega - \frac{2\pi}{b} j \right) \right) \right| \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy \leq \beta_1 \left(-\frac{2\pi}{b} j \right) \|f\|^2$$

und analog

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} \left(\int_{\mathbf{R}} \left| \sum_{n \in \mathbf{N}} \bar{\hat{\psi}}(2^{n+1}y) \hat{\psi} \left(2^n \left(2^1 y + \frac{2\pi}{b} j \right) \right) \right| \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy \right) \leq \beta_1 \left(\frac{2\pi}{b} j \right) \|f\|^2.$$

Zusammen erhalten wir

$$S \leq \sum_{j \text{ ungerade}} \left(\beta_1 \left(\frac{2\pi}{b} j \right) \beta_1 \left(-\frac{2\pi}{b} j \right) \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|^2 = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\beta_1 \left(\frac{2\pi}{b} (2j+1) \right) \beta_1 \left(-\frac{2\pi}{b} (2j+1) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|^2.$$

Also ist $(\psi, 2, b)$ ein Wavelet-Frame für alle Translations-Distanzen b mit

$$m(\psi, 2) > 2 \sum_{l=0}^{\infty} \left(\beta_1 \left(\frac{2\pi}{b} (2l+1) \right) \cdot \beta_1 \left(-\frac{2\pi}{b} (2l+1) \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

In diesem Fall erfüllen die Wavelet-Konstanten (A, B) die oben genannten Abschätzungen, QED.

Das Haar'sche Wavelet hat kompakten Träger, aber es ist nicht differenzierbar. Wir benutzen Satz 13.10 zur Konstruktion eines weiteren Wavelets, des Meyer-Wavelets, mit entgegengesetzten Eigenschaften: Das Meyer-Wavelet ist zwar differenzierbar, aber es hat keinen kompakten Träger. In beiden Fällen erzeugt der Wavelet-Frame $(\psi, 2, 1)$ eine Hilbert-Basis von $L^2(\mathbf{R})$.

13.11 Definition (Meyer-Wavelet)

Das Meyer-Wavelet $\psi \in L^2$ ist über seine Fourier-Transformierte $\hat{\psi} \in L^2$ definiert: Mit der Hilfsfunktion

$$v: \mathbf{R} \longrightarrow [0, 1], \quad v(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 10x^3 - 15x^4 + 6x^5 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

definieren wir

$$\hat{\psi}: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \quad \hat{\psi}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i\omega}{2}} [w(\omega) + w(-\omega)],$$

mit

$$w(\omega) := \begin{cases} \sin \left[\frac{\pi}{2} v \left(\frac{3\omega}{2\pi} - 1 \right) \right] & \frac{2\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{4\pi}{3} \\ \cos \left[\frac{\pi}{2} v \left(\frac{3\omega}{4\pi} - 1 \right) \right] & \frac{4\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und definieren

$$\psi: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \quad \psi(t) := \hat{\psi}(-t),$$

über die inverse Fourier-Transformierte von $\hat{\psi}$.

Da $\hat{\psi}$ kompakten Support hat

$$\text{supp } \hat{\psi} \subset \left[-\frac{8}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi\right] \cup \left[\frac{2}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi\right],$$

ist $\hat{\psi}$ logarithmisch-quadratintegrierbar, also ψ ein Wavelet.

13.12 Bemerkung (Meyer-Wavelet)

Entscheidend bei der Wahl der Hilfsfunktion v in Definition 13.11 ist, daß sie 2-mal stetig differenzierbar ist mit

- Randverhalten $v(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $v(x) = 1$ für $1 \leq x$
- und Symmetrie bzgl. des Punktes $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$v(x) = 1 - v(1 - x).$$

13.13 Satz (Meyer-Wavelet)

Das Meyer-Wavelet $\psi \in L^2$ ist beliebig oft differenzierbar. Das Tupel $(\psi, 2, 1)$ ist ein Wavelet-Frame, der sogar eine Hilbert-Basis von L^2 ist.

Beweis. i) Da die Funktion

$$\hat{\psi} \in L^2$$

kompakten Träger hat, ist ihre Fourier-Transformation beliebig oft differenzierbar. Ihre Ableitungen können analog zu Satz 4.13 berechnet werden.

ii) Um Satz 13.10, Teil ii) anzuwenden, zeigen wir

$$m(\psi, 2) = M(\psi, 2) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^m \omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} :$$

Sei $|\omega| \in [1, 2]$ vorgegeben, o. E. $\omega \in [1, 2]$. Dann gibt es

- entweder genau ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\frac{2\pi}{3} < 2^k \omega < \frac{4\pi}{3} < 2^{k+1} \omega < \frac{8\pi}{3}$$

In diesem Falle gilt

$$\frac{3}{2\pi} 2^k \omega = \frac{3}{4\pi} 2^{k+1} \omega,$$

also

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^m \omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \left(\sin^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{2\pi} 2^k \omega - 1 \right) \right] + \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{4\pi} 2^{k+1} \omega - 1 \right) \right] \right) = \frac{1}{2\pi}$$

- oder es gibt ein genau ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$2^k \omega = \frac{4\pi}{3}.$$

In diesem Falle gilt

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^m \omega)|^2 &= \\ \frac{1}{2\pi} \left(\sin^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{2\pi} \frac{2\pi}{3} - 1 \right) \right] + \sin^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{2\pi} \frac{4\pi}{3} - 1 \right) \right] + \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{4\pi} \frac{8\pi}{3} - 1 \right) \right] \right) &= \\ \frac{1}{2\pi} \left(\sin^2 0 + \sin^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} \right) &= \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

iii) Mit den Bezeichnungen von Satz 13.10 gilt

$$\beta_1(2\pi(2l+1)) = 0, l \in \mathbb{N}:$$

Denn für jedes $\omega \in [1, 2]$ gilt

$$\hat{\psi}(2^{n+m}\omega) = 0 \text{ oder } \hat{\psi}(2^{n+m}\omega + 2^n \cdot 2\pi \cdot (2l+1)) = 0 \text{ für } l, n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{Z}.$$

Nach Satz 13.10, Teil ii), ist $(\psi, 2, 1)$ ein Wavelet-Frame mit den Frame-Konstanten

$$\frac{1}{b} \leq A \leq B \leq \frac{1}{a},$$

also $A = B = 1$.

iv) Das Meyer-Wavelet ist normiert:

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= \|\hat{\psi}\|^2 = \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_{\frac{2\pi}{3} \leq y \leq \frac{4\pi}{3}} \sin^2 \left[\frac{\pi}{2} v \left(\frac{3}{2\pi} y - 1 \right) \right] dy + \frac{2}{2\pi} \int_{\frac{4\pi}{3} \leq y \leq \frac{8\pi}{3}} \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} v \left(\frac{3}{4\pi} y - 1 \right) \right] dy = \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 \sin^2 \left[\frac{\pi}{2} v(z) \right] dz + \frac{4}{3} \int_0^1 \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} v(z) \right] dz = \\ &= \frac{2}{3} \left(1 + \int_0^1 \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} v(z) \right] dz \right) \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie

$$v(x) + v(1-x) = 1, \text{ d.h. } v \left(x + \frac{1}{2} \right) = 1 - v \left(\frac{1}{2} - x \right),$$

gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} v(z) \right] dz &= \int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} v(z) \right] dz + \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - v \left(\frac{1}{2} - z \right) \right) \right] dz = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} v(z) \right] dz + \int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2 \left[\frac{\pi}{2} v(z) \right] dz = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\|\psi\|^2 = \|\hat{\psi}\|^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1.$$

Nach Lemma 13.9 definiert der Wavelet-Frame $(\psi, 2, 1)$ eine Hilbert-Basis, QED.

13.14 Satz (Rekonstruktion aus den Wavelet-Koeffizienten)

Es seien (ψ, a, b) ein Wavelet-Frame mit Frame-Operator

$$S: L^2 \rightarrow L^2$$

und $f \in L^2$ ein Signal.

i) Wenn der Frame eine Hilbert-Basis ist, so gilt

$$f = \sqrt{c_\psi} \sum_{(m,n)} \mathcal{W}_\psi[f](a_m, b_{m,n}) \cdot \psi_{m,n}.$$

ii) Im Falle eines straffen Frames mit Frame-Konstanten $A = B$ gilt

$$f = \frac{\sqrt{c_\psi}}{A} \sum_{(m,n)} \mathcal{W}_\psi[f](a_m, b_{m,n}) \cdot \psi_{m,n}.$$

iii) Im Falle allgemeiner Frame-Konstanten $0 < A \leq B$ gilt

$$f = \frac{2\sqrt{c_\psi}}{(A+B)} \sum_{(m,n)} \mathcal{W}_\psi[f](a_m, b_{m,n}) \cdot S^{-1}(\psi_{m,n}).$$

Dabei kann S^{-1} durch die Partialsummen der geometrischen Reihe

$$S^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\text{id} - S)^k$$

approximiert werden, deren Konvergenzgeschwindigkeit vom Verhältnis

$$\frac{B-A}{B+A} < 1$$

abhängt.

Beweis. Alle Aussagen folgen aus Satz 13.7, Teil ii). Zum Beweis von Teil iii) verwenden wir die Darstellung

$$S(f) = \frac{2\sqrt{c_\psi}}{(A+B)} \sum_{(m,n)} \mathcal{W}_\psi[f](a_m, b_{m,n}) \cdot \psi_{m,n}.$$

Man zeigt ([Heu1986], Satz 12.4), daß aus der Abschätzung

$$\| \text{id} - S \| \leq \frac{B-A}{B+A} < 1$$

die Konvergenz der Neumann'schen Reihe

$$F := \sum_{k \in \mathbb{N}} (\text{id} - S)^k$$

in der Operator-Norm folgt. Dann gilt:

$$(\text{id} - S)F = \sum_{k=1}^{\infty} (\text{id} - S)^k = F - \text{id} \quad \text{und} \quad F(\text{id} - S) = \sum_{k=1}^{\infty} (\text{id} - S)^k = F - \text{id},$$

also

$$F - SF = F - \text{id} \quad \text{und} \quad F - FS = F - \text{id},$$

d.h.

$$SF = \text{id} \quad \text{und} \quad FS = \text{id}.$$

Es folgt

$$F = S^{-1}$$

und

$$f = (S^{-1} S)(f) = \frac{2\sqrt{c_\psi}}{(A+B)} \sum_{(m,n)} W_\psi[f](a_m, b_{m,n}) \cdot S^{-1}(\psi_{m,n}), \text{ QED.}$$

13.15 Bemerkung (Mexikaner-Hut)

Der Mexikaner-Hut ψ aus Beispiel 8.10 definiert einen Wavelet-Frame $(\psi, 2, \pi)$ mit den Wavelet-Konstanten

$$A \approx 3.223 \text{ und } B \approx 3.596, \text{ also } \frac{B-A}{B+A} \approx 0.0547 .$$

14 Multi-Skalen-Analyse

Die Multi-Skalen-Analyse zerlegt ein Signal in seine Bestandteile wachsender Detailgröße. Jede Skala hat eine feste Genauigkeit, durch Verdopplung des Skalierungsparameter erhält man Details doppelter Genauigkeit. Mathematisch gesehen stellt sich der gesamte Prozeß als eine sukzessive Projektion des Ausgangssignals auf abgeschlossene Unterräume des Hilbert-Raumes dar.

In diesem Kapitel beziehen wir alle aus einer Funktion

$$\varphi \in L^2$$

durch Skalierung und Translation abgeleiteten Funktionen

$$\varphi_{k,m} \in L^2, (k, m) \in \mathbf{Z}^2,$$

mit

$$\varphi_{k,m}(t) := \frac{1}{\sqrt{2^k}} (\tau_{m \cdot 2^k} \theta_{2^k} \varphi)(t) = \frac{1}{\sqrt{2^k}} \varphi \left(\frac{t - m \cdot 2^k}{2^k} \right) = \frac{1}{\sqrt{2^k}} \varphi(2^{-k}t - m)$$

auf den festen Zoom-Parameter $a = 2$ (Verdopplung) und die feste Translations-Distanz $b = 1$. Basis der Multiskalen-Analyse ist eine Skalierungsfunktion φ , die bezüglich der Verdopplung selbstähnlich ist.

14.1 Beispiel (Skalierungsfunktion)

Die einfachste Skalierungsfunktion ist die charakteristische Funktion

$$\varphi = \chi_{[0,1]} \in L^2.$$

Sie erfüllt die "Skalierungsgleichung"

$$\varphi = h_0 \varphi_{-1,0} + h_1 \varphi_{-1,1}$$

mit

$$h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

denn

$$\varphi_{-1,0} = \sqrt{2} \chi_{[0,1/2]} \text{ und } \varphi_{-1,1} = \sqrt{2} \chi_{[1/2,1]}.$$

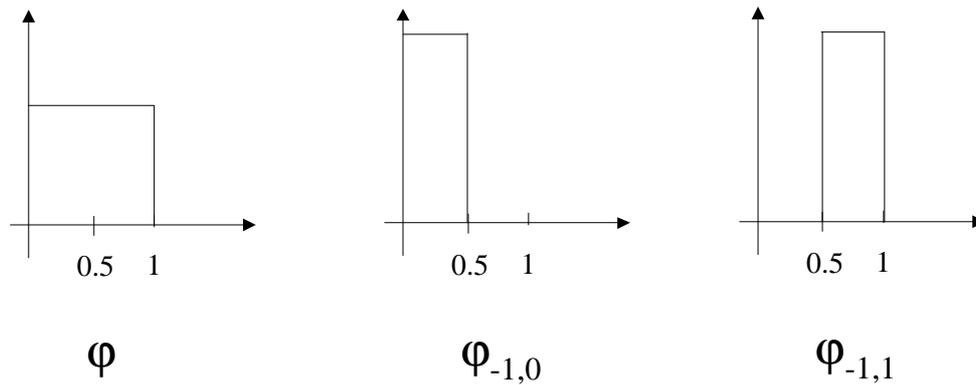


Abbildung 5 Skalierungsfunktion

14.2 Definition (Skalierungsfunktion)

Eine Funktion

$$\varphi \in L^2$$

heißt *Skalierungsfunktion*, wenn sie mit geeigneten Koeffizienten $h_m \in \mathbf{C}$, $k \in \mathbf{Z}$, eine Gleichung

$$\varphi = \sum_{m \in \mathbf{Z}} h_m \varphi_{-1,m} \quad (\text{Skalierungsgleichung})$$

erfüllt, d.h. wenn für alle $x \in \mathbf{R}$ gilt

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \cdot \sum_{m \in \mathbf{Z}} h_m \varphi(2x - m).$$

Die Skalierungsfunktion φ heißt *orthonormal*, wenn die Folge ihrer Translationen

$$(\tau_m \varphi)_{m \in \mathbf{Z}}$$

ein Orthonormal-System im Raum L^2 ist.

Offensichtlich ist die Skalierungsfunktion von Beispiel 14.1 orthonormal.

14.3 Lemma (Orthogonalitätsrelation)

Es sei $\varphi \in L^2$ eine orthonormale Skalierungsfunktion.

i) Die Skalierungskoeffizienten

$$h_m \in \mathbf{C}, m \in \mathbf{Z},$$

aus der Skalierungsgleichung erfüllen die Orthogonalitätsrelationen

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}} h_m \bar{h}_{m+2n} = \delta_{0,n} \quad \text{für jedes } n \in \mathbf{Z}.$$

ii) Wenn φ zusätzlich kompakten Träger hat, so sind nur endlich viele Skalierungskoeffizienten

$$h_m, m \in \mathbf{Z},$$

von Null verschieden.

Beweis. ad i) Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} \delta_{0,n} = \langle \varphi, \tau_{-n} \varphi \rangle &= \left\langle \sqrt{2} \cdot \sum_{m \in \mathbf{Z}} h_m \tau_{\frac{m}{2}} \theta_{\frac{1}{2}} \varphi, \sqrt{2} \cdot \sum_{s \in \mathbf{Z}} h_s \tau_{-\frac{s}{2}} \theta_{\frac{1}{2}} \varphi \right\rangle = \\ &= \sum_{m,s \in \mathbf{Z}} 2 \cdot \left\langle h_m \tau_{\frac{m}{2}} \theta_{\frac{1}{2}} \varphi, h_s \tau_{-\frac{2n+s}{2}} \theta_{\frac{1}{2}} \varphi \right\rangle = \sum_{m,j \in \mathbf{Z}} h_m \bar{h}_{j+2n} 2 \left\langle \tau_{\frac{m}{2}} \theta_{\frac{1}{2}} \varphi, \tau_{\frac{j}{2}} \theta_{\frac{1}{2}} \varphi \right\rangle = \sum_{m \in \mathbf{Z}} h_m \bar{h}_{m+2n}. \end{aligned}$$

ad ii) Zusammen mit

$$(\tau_m \varphi)_{m \in \mathbf{Z}}$$

bilden auch die skalierten Funktionen

$$(\varphi_{-1,m} = \sqrt{2} \cdot \tau_{\frac{m}{2}} \theta_{\frac{1}{2}} \varphi)_{m \in \mathbf{Z}}$$

ein Orthonormal-System. Aus der Skalierungsgleichung

$$\varphi = \sum_{m \in \mathbf{Z}} h_m \varphi_{-1,m}$$

folgt für jedes $k \in \mathbf{Z}$

$$\langle \varphi, \varphi_{-1,k} \rangle = \sum_{m \in \mathbf{Z}} h_m \langle \varphi_{-1,m}, \varphi_{-1,k} \rangle = h_k.$$

Im Falle eines kompakten Trägers $\text{supp } \varphi$ sind für große Werte von $|k|$ die Träger disjunkt

$$\text{supp } \varphi \cap \text{supp } \varphi_{-1,k} = \emptyset,$$

also

$$h_k = 0, \text{ QED.}$$

14.4 Bemerkung (Unterraum-Struktur zu einer Skalierungsfunktion)

Für eine gegebene Skalierungsfunktion φ faßt man den Unterraum

$$V_0 := \overline{\text{span}_C \langle \varphi_{0,m} : m \in \mathbf{Z} \rangle} \subset L^2$$

als den Raum der Signale mit Details der Mindestgröße $2^0 = 1$ auf, der in den Raum

$$V_{-1} := \overline{\text{span}_C \langle \varphi_{-1,m} : m \in \mathbf{Z} \rangle} \subset L^2$$

der Signale mit Details der Mindestgröße $2^{-1} = \frac{1}{2}$ eingebettet ist. Die Orthogonalprojektion

$$V_{-1} \rightarrow V_0$$

projiziert auf den niederfrequenten Teilraum der Signale mit Details doppelter Mindestgröße. Das orthogonale Komplement

$$W_0 := V_0^\perp \subset V_{-1}$$

ist der Raum der Signale, welche die Details der genauen Größe $2^{-1} = \frac{1}{2}$ erfassen. Wir iterieren das Verfahren, die niederfrequenten Anteile herauszuprojetieren, und setzen für beliebiges $k \in \mathbf{Z}$:

$$V_k := \overline{\text{span}_C \langle \varphi_{k,m} : m \in \mathbf{Z} \rangle} \subset L^2$$

der Unterraum der Signale mit Details der Mindestgröße 2^k und

$$W_k := V_k^\perp \subset V_{k-1},$$

der Unterraum der Signale mit Details der genauen Größe 2^{k-1} . Das Ergebnis ist eine aufsteigende Folge von Unterräumen von Signalen:

$$0 \subset \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \subset L^2$$

Hinzunahme feinerer Details zu höheren Frequenzen \longrightarrow

\longleftarrow Reduktion auf gröbere Details zu niedrigeren Frequenzen

Wir zeigen, daß diese Unterraum-Struktur bereits unter einer schwachen Zusatzvoraussetzung an die Skalierungsfunktion eine separable Ausschöpfung des gesamten Hilbert-Raumes liefert.

14.5 Satz (Multi-Skalen-Analyse)

Eine orthonormale Skalierungsfunktion

$$\varphi \in L^2 \cap L^1 \text{ mit } \hat{\varphi}(0) \neq 0$$

erzeugt eine *Multi-Skalen-Analyse*, d.h. die aufsteigende Folge

$$0 \subset \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \subset L^2$$

von abgeschlossenen Unterräumen des Hilbert-Raumes L^2

$$V_k := \overline{\text{span}_C \langle \varphi_{k,m} : m \in \mathbf{Z} \rangle}, k \in \mathbf{Z},$$

ist eine separable Ausschöpfung:

$$0 = \bigcap_{k \in \mathbf{Z}} V_k \text{ und } L^2 = \overline{\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} V_k}.$$

Beweis. i) Die Skalierungsgleichung liefert

$$V_0 \subset V_{-1},$$

und durch weitere Skalierung folgt

$$V_{k+1} \subset V_k \text{ für alle } k \in \mathbf{Z}.$$

ii) Zum Beweis der Ausschöpfungseigenschaft ist zu zeigen, daß der Orthogonalraum von

$$L^2 = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} V_k$$

nur die Null enthält.

Wir bezeichnen mit

$$P_k : L^2 \longrightarrow V_k, k \in \mathbf{Z},$$

die Orthogonalprojektion und betrachten ein beliebiges Element $f \in L^2$ mit

$$P_k(f) = 0 \text{ für alle } k \in \mathbf{Z}.$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir eine Funktion $g \in L^2$, deren Fourier-Transformation \hat{g} kompakten Träger hat

$$\text{supp } \hat{g} \subset [-R, R], R \in \mathbf{R},$$

und die Fourier-Transformation von f approximiert

$$\|\hat{f} - \hat{g}\| < \varepsilon.$$

Dann gilt auch

$$\|f - g\| < \varepsilon.$$

Es folgt

$$P_k(g) = P_k(g) - P_k(f) = P_k(g - f)$$

und

$$\|P_k(g)\| = \|P_k(g - f)\| \leq \|g - f\| < \varepsilon.$$

Für jedes $k \in \mathbf{N}$ ist die Folge

$$\left(\varphi_{k,m} = \frac{1}{\sqrt{2^k}} \tau_m \theta_{2^k} \varphi \right)_{m \in \mathbf{Z}}$$

eine Hilbert-Basis von V_k , also gilt

$$\|P_k(g)\|^2 = \sum_{m \in \mathbf{Z}} |\langle g, \varphi_{k,m} \rangle|^2 = \sum_{m \in \mathbf{Z}} |\langle \hat{g}, \hat{\varphi}_{k,m} \rangle|^2.$$

Unter Verwendung von

$$\hat{\varphi}_{k,m}(\omega) = \sqrt{2^k} e^{-im2^k \omega} \hat{\varphi}(2^k \omega)$$

gemäß Lemma 4.7 berechnen wir

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}, \hat{\phi}_{k,m} \rangle &= \sqrt{2^k} \int_{-R}^R \hat{g}(\omega) \overline{\hat{\phi}(2^k \omega)} e^{im2^k \omega} d\omega = \\ &= \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2^{k-1}}{\pi}} \int_{-R}^R \hat{g}(\omega) \overline{\hat{\phi}(2^k \omega)} e^{im2^k \omega} d\omega. \end{aligned}$$

Für den Grenzübergang

$$k \rightarrow -\infty$$

betrachten wir die Hilbert-Räume $L^2 \left(\left[-2^{-k} \pi, 2^{-k} \pi \right], \frac{d\omega}{\sqrt{\frac{2^{k-1}}{\pi}}} \right)$, in denen jeweils die Folgen

der trigonometrischen Monome

$$\left(e^{im2^k \omega} \right)_{m \in \mathbb{Z}}$$

nach Satz 3.11 eine Hilbert-Basis sind. Das feste Integrationsintervall

$$[-R, R]$$

ist für große Werte von $-k$ enthalten in den Intervallen

$$\left[-2^{-k} \pi, 2^{-k} \pi \right].$$

Damit ist

$$\langle \hat{g}, \hat{\phi}_{k,m} \rangle$$

bis auf den Faktor $\sqrt{2\pi}$ der m -te Fourier-Koeffizient der Funktion

$$\hat{g} \cdot \theta_{2^{-k}} \bar{\hat{\phi}} \in L^2 \left(\left[-2^{-k} \pi, 2^{-k} \pi \right], \frac{d\omega}{\sqrt{\frac{2^{k-1}}{\pi}}} \right).$$

Es gilt also für große Werte von $-k$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \langle \hat{g}, \hat{\phi}_{k,m} \rangle \right|^2 = 2\pi \cdot \left\| \hat{g} \cdot \theta_{2^{-k}} \bar{\hat{\phi}} \right\|^2$$

und insgesamt

$$\| P_k(g) \|^2 = 2\pi \left\| \hat{g} \cdot \theta_{2^{-k}} \bar{\hat{\phi}} \right\|^2.$$

Wegen

$$\varphi \in L^1$$

ist nach Lemma 4.5 die Fourier-Transformierte $\hat{\phi}$ stetig. Da \hat{g} außerdem kompakten Träger hat, folgt im Grenzübergang

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \hat{g} \cdot \theta_{2^{-k}} \bar{\phi} = \hat{g} \cdot \bar{\phi}(0),$$

also

$$\varepsilon \geq \lim_{k \rightarrow -\infty} \|P_k(g)\| = \lim_{k \rightarrow -\infty} 2\pi \|\hat{g} \cdot \theta_{2^{-k}} \bar{\phi}\|^2 = 2\pi \|\hat{g}\|^2 \cdot |\bar{\phi}(0)|^2$$

und

$$\|g\|^2 = \|\hat{g}\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2\pi |\bar{\phi}(0)|^2}.$$

Aus der Abschätzung

$$\|f\| \leq \|f - g\| + \|g\| \leq \varepsilon + \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi |\bar{\phi}(0)|^2}}$$

folgt die Behauptung

$$f = 0.$$

iii) Es sei eine Funktion

$$f \in \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} V_k$$

vorgegeben. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir als Approximation von f eine stetige Funktion $f^\varepsilon \in L^2$ mit kompaktem Träger

$$\text{supp } f^\varepsilon \subset [-R, R], \quad R \in \mathbb{R},$$

und

$$\|f - f^\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Es folgt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \|f\| &= \|P_k(f)\| = \|(P_k(f) - P_k(f^\varepsilon)) + P_k(f^\varepsilon)\| \leq \\ &\|P_k(f) - P_k(f^\varepsilon)\| + \|P_k(f^\varepsilon)\| < \varepsilon + \|P_k(f^\varepsilon)\|, \end{aligned}$$

da für die Orthogonalprojektion P_k gilt

$$\|P_k\| = 1.$$

Wir berechnen

$$\|P_k(f^\varepsilon)\|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\langle f^\varepsilon, \phi_{k,m} \rangle|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-R}^R f^\varepsilon(x) \cdot \overline{\phi_{k,m}(x)} dx \right|^2 \leq$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-R}^R |f^\varepsilon(x)|^2 dx \int_{-R}^R |\varphi_{k,m}(x)|^2 dx \leq \\ & \|f^\varepsilon\|^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{-k} \int_{-R}^R |\varphi(2^{-k}x - m)|^2 dx = \\ & \|f^\varepsilon\|^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-2^{-k}R - m}^{2^{-k}R - m} |\varphi(z)|^2 dz = \|f^\varepsilon\|^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{I_{k,m}} |\varphi(z)|^2 dz \end{aligned}$$

mit Intervallen

$$I_{k,m} = [-2^{-k}R - m, 2^{-k}R - m],$$

die für großes k bzgl. m paarweise disjunkt sind:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{I_{k,m}} |\varphi(z)|^2 dz \leq \int_{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} I_{k,m}} |\varphi(z)|^2 dz.$$

Da die Länge der Intervalle im Grenzwert $k \rightarrow \infty$ verschwindet, folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{I_{k,m}} |\varphi(z)|^2 dz = 0,$$

also insgesamt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_k(f^\varepsilon)\|^2 = 0$$

und

$$\|f\| \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt

$$f = 0, \text{ QED.}$$

Die Multi-Skalen-Analyse hat die wichtige Eigenschaft, daß sie über ihre Skalierungsfunktion ein Wavelet liefert. Und dieses Wavelet ψ erzeugt sogar einen Wavelet-Frame $(\psi, 2, 1)$, der eine Hilbert-Basis ist.

14.6 Satz (Wavelets einer Multi-Skalen-Analyse)

Es sei $\varphi \in L^2 \cap L^1$ mit

$$\hat{\varphi}(0) \neq 0$$

eine orthonormale Skalierungsfunktion mit Skalierungsgleichung

$$\varphi = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \cdot \varphi_{-1,m}.$$

Definiert man die folgenden Koeffizienten

$$g_m := (-1)^m \bar{h}_{1-m} \in \mathbf{C}, \quad m \in \mathbf{Z},$$

so gilt:

i) Die Funktion

$$\psi := \sum_{m \in \mathbf{Z}} g_m \cdot \varphi_{-1,m} \in L^2$$

ist ein Wavelet.

ii) Bzgl. der zu φ gehörigen Multi-Skalen-Analyse ist für jedes $k \in \mathbf{Z}$ die Familie

$$\left(\psi_{k,m} = \frac{1}{\sqrt{2^k}} \tau_{m \cdot 2^k} \theta_{2^k} \psi \right)_{m \in \mathbf{Z}}$$

eine Hilbert-Basis des Orthogonalraumes

$$W_k := V_k^\perp \subset V_{k-1}.$$

Insbesondere ist das Tupel $(\psi, 2, 1)$ ein Wavelet-Frame, der sogar eine Hilbert-Basis von L^2 liefert.

Beweis. Die Funktion

$$\psi := \sum_{m \in \mathbf{Z}} g_m \cdot \varphi_{-1,m} \in L^2$$

ist wohldefiniert, weil die Folge $(\varphi_{-1,m})_{m \in \mathbf{Z}}$ ein Orthonormal-System ist und die Koeffizienten $(g_m)_{m \in \mathbf{Z}}$ quadrat-summierbar sind nach Lemma 14.3

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}} |g_m|^2 = \sum_{m \in \mathbf{Z}} |h_m|^2 = 1 < \infty.$$

Es genügt, die Hilbert-Basis Eigenschaft für $k = 0$ zu zeigen. Nach Definition gilt $\psi \in V_{-1}$. Zunächst steht ψ auf allen Translationen

$$\tau_m \varphi, \quad m \in \mathbf{Z},$$

der Skalierungsfunktion senkrecht steht: Wir berechnen - unter Verwendung von

$$\tau_m \varphi_{-1,k} = \varphi_{-1,2m+k}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi, \tau_m \varphi \rangle &= \sum_{k,s \in \mathbf{Z}} g_k \bar{h}_s \langle \varphi_{-1,k}, \tau_m \varphi_{-1,s} \rangle = \sum_{k,s \in \mathbf{Z}} g_k \bar{h}_s \langle \varphi_{-1,k}, \varphi_{-1,2m+s} \rangle = \sum_{k,s \in \mathbf{Z}} g_k \bar{h}_s \delta_{k,2m+s} = \\ &= \sum_{s \in \mathbf{Z}} (-1)^s \bar{h}_{1-2m-s} \bar{h}_s = \sum_{s \in \mathbf{Z}} \bar{h}_{1-2(m+s)} \bar{h}_{2s} - \sum_{s \in \mathbf{Z}} \bar{h}_{1-2(m+s)-1} \bar{h}_{2s+1} = \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbf{Z}} \bar{h}_{1+2\lambda} \bar{h}_{-2(m+\lambda)} - \sum_{s \in \mathbf{Z}} \bar{h}_{-2(m+s)} \bar{h}_{1+2s} = 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\psi \in W_0 := V_0^\perp \subset V_{-1}.$$

Die Folge $(\tau_m \psi)_{m \in \mathbb{Z}}$ ist ein Orthogonalsystem:

$$\begin{aligned} \langle \tau_m \psi, \tau_n \psi \rangle &= \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} g_k \bar{g}_l \langle \varphi_{-1, 2m+k}, \tau_m \varphi_{-1, 2n+l} \rangle = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} g_k \bar{g}_l \delta_{2m+k, 2n+l} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \bar{h}_{1-k} (-1)^k h_{1-2(m-n)-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_k h_{k-2(m-n)-k} = \delta_{0, m-n}. \end{aligned}$$

Die Folge $(\tau_m \psi)_{m \in \mathbb{Z}}$ ist vollständig im Unterraum W_0 - oder gleichwertig: Die Folge

$$(\tau_m \psi)_{m \in \mathbb{Z}} \cup (\tau_m \varphi)_{m \in \mathbb{Z}}$$

ist vollständig im Unterraum

$$V_{-1} = V_0 \oplus W_0.$$

Hierfür ist nur die Darstellbarkeit der Funktion $\varphi_{-1,0}$ zu zeigen. Wie verwenden die Parseval-Gleichung (Korollar 1.9):

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \langle \varphi_{-1,0}, \tau_m \psi \rangle \right|^2 + \left| \langle \varphi_{-1,0}, \tau_m \varphi \rangle \right|^2 &= \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{g}_k \langle \varphi_{-1,0}, \varphi_{-1, 2m+k} \rangle \right|^2 + \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_k \langle \varphi_{-1,0}, \varphi_{-1, 2m+k} \rangle \right|^2 &= \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{g}_k \delta_{0, 2m+k} \right|^2 + \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_k \delta_{0, 2m+k} \right|^2 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} |h_{1+2m}|^2 + |h_{-2m}|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |h_m|^2 = 1 \end{aligned}$$

nach Lemma 14.3. Andererseits gilt

$$\| \varphi_{-1,0} \|^2 = 1.$$

Nach Satz 14.5 schöpfen die Räume $(V_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ und damit auch die Räume $(W_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ den gesamten Hilbert-Raum L^2 aus.

Die Zulässigkeitsbedingung folgt aus dem bereits in Kapitel 12 erwähnten allgemeinen Sachverhalt ([LMR1998], Lemma 2.1.3), daß ein fester Frame (ψ, a, b) mit Frame-Konstante A die Zulässigkeitsbedingung

$$c_\psi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 2 \cdot A \cdot b \cdot \ln a < \infty$$

erfüllt. Daher ist $(\psi, 2, 1)$ ein Wavelet-Frame, der sogar eine Hilbert-Basis von L^2 liefert, QED.

14.7 Bemerkung (Wavelets einer Multi-Skalen-Analyse)

Die orthonormale Skalierungsfunktion aus Beispiel 14.1 definiert über ihre Multi-Skalen-Analyse das Haar-Wavelet. Es gibt jedoch Wavelets, die nicht über eine Multiskalenanalyse gewonnen werden können, vgl. [LMR1998], Kapitel 2.2.

Nach Satz 14.6 erhält man ein Wavelet, wenn man von einer orthonormalen Skalierungsfunktion ausgeht, die eine schwache Zusatzvoraussetzung erfüllt. Das aus der Folge ihrer Skalierungs-Koeffizienten $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ konstruierte Wavelet liefert einen Frame, der sogar eine Hilbert-Basis ist. Welche Voraussetzungen muß umgekehrt eine Folge von Koeffizienten

$$(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

erfüllen, damit sie als Skalierungs-Koeffizienten eine solche Skalierungsfunktion definieren? Wir betrachten die Frage im Frequenzraum und formulieren eine notwendige Bedingung:

14.8 Lemma (Skalierung im Frequenzraum)

i) Eine Funktion

$$\varphi \in L^2$$

erfüllt genau dann die Skalierungsgleichung

$$\varphi = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \varphi_{-1,m},$$

wenn für ihre Fourier-Transformierte $\hat{\varphi}$ gilt

$$\hat{\varphi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

mit der trigonometrischen Reihe

$$H(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-ik\omega},$$

dem *Fourier-Filter* der Skalierungs-Koeffizienten $(h_m)_{m \in \mathbb{Z}}$.

ii) Eine Skalierungsfunktion $\varphi \in L^2$ ist genau dann orthonormal, wenn für ihre Fourier-Transformation gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + k 2\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi} \text{ für fast alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

Für eine orthonormale Skalierungsfunktion

$$\varphi \in L^1 \cap L^2 \text{ mit } \hat{\varphi}(0) \neq 0$$

gilt bereits

$$|\hat{\varphi}(0)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ und } \hat{\varphi}(k 2\pi) = 0 \text{ für } k \neq 0.$$

iii) Das Fourier-Filter einer orthonormalen Skalierungsfunktion

$$\varphi \in L^1 \cap L^2 \text{ mit } \hat{\varphi}(0) \neq 0$$

erfüllt die Orthogonalitätsbedingung

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1, \omega \in \mathbf{R}.$$

Insbesondere gilt $H(0) = 1$ und $H(\pi) = 0$, d.h.

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}} h_m = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \sum_{m \in \mathbf{Z}} (-1)^m h_m = 0.$$

Beweis. ad i) Zum Beweis wenden wir auf die Darstellung

$$\varphi = \sqrt{2} \cdot \sum_{m \in \mathbf{Z}} h_m \tau_{\frac{m}{2}} \theta_{\frac{1}{2}} \varphi$$

die Fourier-Transformation und die Formeln von Lemma 4.7 an:

$$\hat{\varphi}(\omega) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbf{Z}} h_m e^{-i\frac{m}{2}\omega} \cdot \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Die umgekehrte Richtung folgt aus der Tatsache, daß die Fourier-Transformation ein Isomorphismus ist.

ad ii) Für eine orthonormale Skalierungsfunktion φ gilt

$$\delta_{0,m} = \langle \varphi, \tau_{-m}\varphi \rangle = \langle \hat{\varphi}, e_m \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbf{R}} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 e^{-im\omega} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + k2\pi)|^2 e^{-im\omega} d\omega.$$

Die periodische Funktion

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \omega \mapsto \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + k2\pi)|^2$$

hat also den m -ten Fourier-Koeffizienten

$$\frac{\delta_{0,m}}{2\pi}.$$

Aus Satz 3.11 folgt die Behauptung

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + k2\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi} \quad \text{für fast alle } \omega \in \mathbf{R}.$$

In der umgekehrten Richtung erhält man aus der Berechnung der Fourier-Koeffizienten die Orthonormalität.

Nun sei

$$\varphi \in L^1 \cap L^2 \quad \text{orthonormal mit } \hat{\varphi}(0) \neq 0.$$

Wir wählen eine Funktion $g \in L^2$, $g \neq 0$, mit

$$\text{supp } \hat{g} \subset [-1, 1].$$

Analog zum Beweis von Satz 14.5 gilt für große Werte von $-k$

$$\|P_k g\|^2 = \|P_k \hat{g}\|^2 = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \left| \langle \hat{g}, \varphi_{k,m} \rangle \right|^2 = 2\pi \left\| \hat{g} \cdot \theta_{2^{-k}} \bar{\varphi} \right\|^2.$$

Nach Satz Satz 14.5 gilt

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \| P_k g \|^2 = \| g \|^2 = \| \hat{g} \|^2,$$

andererseits

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} 2\pi \| \hat{g} \cdot \theta_{2^{-k}} \bar{\hat{\phi}} \|^2 = 2\pi | \hat{\phi}(0) |^2 \| \hat{g} \|^2.$$

Es folgt

$$| \hat{\phi}(0) |^2 = \frac{1}{2\pi}.$$

Da die Fourier-Transformierte $\hat{\phi}$ stetig ist, gilt die Gleichung

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} | \hat{\phi}(\omega + k 2\pi) |^2 = \frac{1}{2\pi}$$

für alle Argumente $\omega \in \mathbf{R}$, insbesondere also für $\omega = 0$. Hieraus folgt

$$\hat{\phi}(k 2\pi) = 0 \text{ für } k \neq 0.$$

ad iii) Aus der Skalierungsgleichung im Fourier-Raum folgt nach Teil i) unter der Voraussetzung

$$\hat{\phi}(0) \neq 0$$

die Gleichung

$$H(0) = 1.$$

Zum Beweis der Orthogonalitätsbedingung des Fourier-Filters berechnen wir nach Teil i) und ii)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} | \hat{\phi}(\omega + 2k\pi) |^2 = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \left| H\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \right|^2 \cdot \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \right|^2 = \\ &\sum_{k \in \mathbf{Z}} \left| H\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 \cdot \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 + \sum_{k \in \mathbf{Z}} \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2k\pi\right) \right|^2 \cdot \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2k\pi\right) \right|^2 = \\ &\left| H\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbf{Z}} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 + \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbf{Z}} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2k\pi\right) \right|^2 = \\ &\left| H\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \frac{1}{2\pi} + \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

also

$$\left| H\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 + \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 = 1 \text{ für alle } \omega \in \mathbf{R}, \text{ QED.}$$

Der folgende Satz formuliert hinreichende Bedingungen dafür, daß eine Koeffizientenfolge als Folge von Skalierungskoeffizienten von einer Skalierungsfunktion stammt.

14.9 Satz (Konstruktion von Skalierungsfunktionen)

Gegeben sei ein Fourier-Filter

$$H \in L^2, H(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-im\omega}, \text{ mit}$$

- Orthogonalitätsbedingung

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \text{ für alle } \omega \in \mathbf{R}$$

- Normierung

$$H(0) = 1$$

- Hölderstetigkeit im Nullpunkt, d.h.

$$\text{es gibt } C, \varepsilon > 0 \text{ mit } |H(0) - H(\omega)| < C |\omega|^\varepsilon \text{ für alle } \omega \in \mathbf{R}$$

- und "Cohen-Bedingung", d.h.

$$\text{ohne Nullstelle im Intervall } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Dann konvergieren die Funktionen $(\hat{\phi}_m)_{m \in \mathbb{Z}}$

$$\hat{\phi}_m(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2^m}} \prod_{j=1}^m H\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \chi_{[-2^m\pi, 2^m\pi]}(\omega)$$

im Hilbert-Raum L^2 gegen eine Funktion $\hat{\phi}$, deren inverse Fourier-Transformation $\varphi \in L^2$ eine orthonormale Skalierungsfunktion ist.

Beweis. [LMR1998], Satz 2.4.7.

Wir studieren nun Fourier-Filter H , welche die Voraussetzungen von Satz 14.9 erfüllen. Dabei beschränken wir uns auf trigonometrische Polynome mit reellen Skalierungskoeffizienten:

$$H \in L^2, H(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^N h_k e^{-ik\omega}, h_k \in \mathbf{R} \text{ für } k = 0, \dots, N.$$

Die Beschränkung auf Polynome bewirkt, daß die resultierenden Skalierungsfunktionen kompakten Träger haben. Da die Skalierungskoeffizienten reell sind, ist die Funktion

$$q := |H|^2 \in L^2$$

wegen

$$\overline{H}(\omega) = H(-\omega)$$

ein gerades trigonometrisches Polynom

$$q(\omega) = q(-\omega)$$

mit

$$q \geq 0, q(0) = 1 \text{ und } q(\omega) + q(\omega + \pi) = 1.$$

Die Fourier-Reihe eines geraden trigonometrischen Polynoms mit reellen Fourier-Koeffizienten enthält nur \cos -Terme. Wegen der Periodizitätsbedingung enthält die Fourier-Entwicklung von q zudem nur ungerade Koeffizienten. Also gehört q zur Menge der trigonometrischen Reihen

$$K := \left\{ f \in L^2[0, 2\pi] : f \geq 0, f(\omega) = \frac{1}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos(2k-1)\omega, \sum_{k \geq 1} a_k = \frac{1}{2} \right\}.$$

Diese Menge ist konvex, ihre endlich-dimensionalen Teilmengen trigonometrischer Polynome

$$K_N := \left\{ f \in L^2[0, 2\pi] : f \geq 0, f(\omega) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(2k-1)\omega, \sum_{k=1}^N a_k = \frac{1}{2} \right\}, N \in \mathbb{N},$$

sind konvexe und beschränkte Teilmengen von \mathbf{R}^N . Damit lassen sie sich als konvexe Kombination ihrer Extrempunkte darstellen:

14.10 Satz (Extrempunkt)

Für jede konvexe und beschränkte Menge

$$K_N := \left\{ f \in L^2[0, 2\pi] : f \geq 0, f(\omega) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(2k-1)\omega, \sum_{k=1}^N a_k = \frac{1}{2} \right\}, N \in \mathbb{N},$$

ist die Funktion

$$q_N \in K_N, q_N(\omega) := 1 - \frac{\int_0^\omega \sin^{2N-1} t \, dt}{\int_0^\pi \sin^{2N-1} t \, dt}$$

ein Extrempunkt von K_N .

Beweis. Vgl. [LMR1998], Lemma 2.4.21. Man konstruiert q_N als Durchschnitt von $N-1$ Stütz-Hyperflächen und der durch die Gleichung

$$\sum_{k=1}^N a_k = \frac{1}{2}$$

definierten Hyperfläche. Dieses System von N linear-unabhängigen linearen Gleichungen in N Veränderlichen hat eine eindeutig bestimmte Lösung.

14.11 Beispiel (Daubechies-Wavelets im Überblick)

Die Extrempunkte aus Satz 14.10 liefern eine Folge von Wavelets, die *Daubechies-Wavelets* ψ_N , $N \geq 2$. Ihre Bedeutung liegt darin, daß sie kompakten Träger haben und mit wachsendem N immer bessere Differenzierbarkeitseigenschaften. Außerdem liefert jedes ψ_N über den Wavelet-Frame $(\psi_N, 2, 1)$ eine Hilbert-Basis von L^2 .

Wir gehen aus von dem Extrempunkt für $N = 2$.

$$q_2 \in \mathbf{K}_2, q_2(\omega) := 1 - \frac{\int_0^\omega \sin^3 t \, dt}{\int_0^\pi \sin^3 t \, dt}.$$

Es ist

$$\int_0^\omega \sin^3 t \, dt = -\frac{3}{4} \cos \omega + \frac{1}{12} \cos 3\omega + \frac{2}{3},$$

also

$$\int_0^\pi \sin^3 t \, dt = \frac{4}{3}$$

und

$$q_2(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{9}{16} \cos \omega - \frac{1}{16} \cos 3\omega.$$

Für das Fourier-Filter machen wir den Ansatz

$$H_2(\omega) = \sum_{k=0}^3 h_k e^{i\omega k} \text{ mit } h_k \in \mathbf{R}, k = 0, 1, 2, 3.$$

Die Gleichung

$$q = |H|^2$$

liefert über einen Koeffizientenvergleich das folgende System von vier quadratischen Gleichungen:

- $h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1$
- $h_1 h_0 + h_2 h_1 + h_3 h_2 = \frac{9}{16}$
- $h_2 h_0 + h_3 h_1 = 0$
- $h_3 h_0 = -\frac{1}{16}$.

Es hat die eindeutige Lösung

$$h_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

Das Fourier-Filter H ist als trigonometrische Polynom Hölder-stetig und hat - wie sein Quadrat q - keine Nullstelle im Intervall

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Nach Satz 14.9 konvergieren die Funktionen $(\hat{\phi}_m)_{m \in \mathbb{Z}}$

$$\hat{\phi}_m(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^m H\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \chi_{[-2^m\pi, 2^m\pi]}(\omega)$$

gegen die Fourier-Transformation einer orthonormalen Skalierungsfunktion ϕ . Das zugehörige Wavelet ψ_2 , heißt 2-tes Daubechies-Wavelet. Sein Wavelet-Frame $(\psi_2, 2, 1)$ ist eine Hilbert-Basis von L^2 aus stetigen Funktionen mit kompaktem Träger.

Die allgemeine Konstruktion für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ liefert das N-te Daubechies-Wavelet ψ_N , dessen Frame $(\psi_N, 2, 1)$ ebenfalls eine Hilbert-Basis ist. Das N-te Daubechies-Wavelet hat kompakten Träger. Seine Differenzierbarkeitsklasse C^k wächst linear mit N; bereits für $N = 5$ ist ψ_5 stetig differenzierbar.

15 Schnelle Wavelet-Transformation

Unter der schnellen Wavelet-Transformation versteht man Algorithmen zur schnellen Berechnung der diskreten Wavelet-Transformation. Die Analyse berechnet die Folge der Wavelet-Koeffizienten eines gegebenen Signals, die Synthese rekonstruiert aus den Wavelet-Koeffizienten das Ausgangssignal.

Alle vorgestellten Algorithmen beruhen auf der Multi-Skalen-Analyse und benutzen als wesentliche mathematische Operationen Faltungsoperatoren im Hilbert-Raum $l^2(\mathbf{Z})$.

15.1 Bezeichnung (Skalierungsfunktion und Wavelet)

Wie legen in diesem Kapitel eine feste Multi-Skalen-Analyse zugrunde, die von einer orthonormalen Skalierungsfunktion

$$\varphi \in L^2 \cap L^1 \quad \text{mit} \quad \hat{\varphi}(0) \neq 0$$

und Skalierungsgleichung

$$\varphi = \sum_{m \in \mathbf{Z}} h_m \varphi_{-1,m}$$

erzeugt wird. Es sei ψ das gemäß Satz 14.6 erzeugte orthonormale Wavelet

$$\psi = \sum_{m \in \mathbf{Z}} g_m \varphi_{-1,m} \in L^2 \quad \text{mit} \quad g_m := (-1)^m \bar{h}_{1-m} \in \mathbf{C}, m \in \mathbf{Z}.$$

Da ψ einen Wavelet-Frame $(\psi, 2, 1)$ bildet, ist ein beliebiges Signal bereits durch seine Wavelet-Koeffizienten bzgl. des Frames festgelegt. Diese Koeffizienten sind die Fourier-Koeffizienten, da der Frame sogar eine Hilbert-Basis von L^2 ist. Die zu analysierenden Signale werden als Elemente des Grundraumes

$$f \in V_0 := \overline{\text{span}_{\mathbf{C}} \langle \varphi_{0,m} : m \in \mathbf{Z} \rangle}, k \in \mathbf{Z},$$

vorausgesetzt und dort durch ihre Fourier-Koeffizienten

$$\langle f, \varphi_{0,m} \rangle, m \in \mathbf{Z},$$

beschrieben. Allgemein bezeichnen wir mit

$$V_k := \overline{\text{span}_{\mathbf{C}} \langle \varphi_{k,m} : m \in \mathbf{Z} \rangle}, k \in \mathbf{Z},$$

den Raum der Signale mit Details der Mindestgröße 2^k und mit

$$W_k := \overline{\text{span}_{\mathbf{C}} \langle \psi_{k,m} : m \in \mathbf{Z} \rangle} \subset V_{k-1}, k \in \mathbf{Z},$$

den Raum der Signale mit Details der genauen Größe 2^k , das orthogonale Komplement von V_k in V_{k-1} .

15.2 Definition (Zerlegungs-Operatoren)

Für eine summierbare Folge

$$(h_m)_{m \in \mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$$

von Skalierungskoeffizienten definieren wir auf dem Hilbert-Raum $l^2 = l^2(\mathbb{Z})$ die linearen Operatoren:

- "Faltung" mit den Skalierungskoeffizienten

$$H: l^2 \rightarrow l^2, H(c)_m := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{n-2m} c_n \quad \text{und} \quad H^*: l^2 \rightarrow l^2, H^*(c)_m := \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{m-2n} c_n$$

- und "Faltung" mit den abgeleiteten Koeffizienten

$$G: l^2 \rightarrow l^2, G(c)_m := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{g}_{n-2m} c_n \quad \text{und} \quad G^*: l^2 \rightarrow l^2, G^*(c)_m := \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{m-2n} c_n.$$

15.3 Bemerkung

i) Die beiden Operatoren G und H sind durch die l^1 -Norm von $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ bzw. $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ beschränkt.

ii) Die Paare (H, H^*) und (G, G^*) sind jeweils zueinander adjungiert:

$$\langle H(x), y \rangle = \langle x, H^*(y) \rangle \quad \text{und} \quad \langle G(x), y \rangle = \langle x, G^*(y) \rangle.$$

iii) Die Operatoren haben im Unterschied zur üblichen Faltung einen Faktor 2 bei der Verschiebung des Index.

Der folgende Algorithmus berechnet die Wavelet-Koeffizienten eines Signals $f \in V_0$ aus dem Grundraum auf einer Anzahl von Skalen mit immer größeren Details bezüglich der orthogonalen Zerlegung

$$V_0 = V_K \oplus \sum_{k=1}^K W_k, \quad K \geq 1.$$

Er ermittelt die Fourier-Koeffizienten von f

- in den Räumen W_k der Details der genauen Größe $2^0, 2^1, \dots, 2^{K-1}$
- und im Raum V_K der Details der Mindestgröße 2^K .

15.4 Algorithmus (Schnelle Wavelet-Analyse)

Input.

- Signal $f \in V_0$, repräsentiert durch seine Fourier-Koeffizienten

$$c_m^0 := \langle f, \varphi_{0,m} \rangle, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

- Anzahl der gewünschten Skalen $K \geq 1$

Output.

- Fourier-Koeffizienten der Projektion von f auf V_K

$$c_m^K := \langle f, \varphi_{K,m} \rangle, m \in \mathbf{Z},$$

- Wavelet-Koeffizienten aus W_k von f

$$d_m^k := \langle f, \psi_{k,m} \rangle, m \in \mathbf{Z}, k = 1, \dots, K.$$

Algorithmus.

$k = 1$	
$k \leq K$	
	$d^k = G(c^{k-1})$
	$c^k = H(c^{k-1})$
	$k = k + 1$

Abbildung 6 Schnelle Wavelet-Analyse

Beweis. Wir definieren

$$d^k := (d_m^k)_{m \in \mathbf{Z}} \text{ mit } d_m^k := \langle f, \psi_{k,m} \rangle$$

$$\text{und } c^k := (c_m^k)_{m \in \mathbf{Z}} \text{ mit } c_m^k := \langle f, \varphi_{k,m} \rangle, m \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z},$$

und zeigen für alle $k \geq 1$:

$$c^k = H(c^{k-1}) \text{ und } d^k = G(c^{k-1}).$$

Aus der Skalierungsgleichung

$$\varphi_{0,0} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n \varphi_{-1,n}$$

folgt

$$\varphi_{k,m} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n \varphi_{k-1,n+2m},$$

also

$$c_m^k = \langle f, \varphi_{k,m} \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{h}_n \langle f, \varphi_{k-1,n+2m} \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{h}_n c_{n+2m}^{k-1} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{h}_{n-2m} c_n^{k-1} = H(c^{k-1})_m.$$

Mit der Definition des Wavelet

$$\psi_{0,0} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} g_n \varphi_{-1,n}$$

folgt

$$d_m^k = \langle f, \psi_{k,m} \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{g}_n \langle f, \varphi_{k-1,n+2m} \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{g}_n c_{n+2m}^{k-1} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{g}_{n-2m} c_n^{k-1} = G(c^{k-1})_m, \text{ QED.}$$

Der folgende Algorithmus rekonstruiert die Funktion

$$f \in V_0 := \overline{\text{span}_C \langle \varphi_{0,m} : m \in \mathbf{Z} \rangle} \subset L^2 .$$

aus ihren Wavelet-Koeffizienten zu Skalen mit Details verschiedener Größe gemäß der orthogonalen Zerlegung

$$V_0 = V_K \oplus \sum_{k=1}^K W_k , K \geq 1 .$$

15.5 Algorithmus (Schnelle Wavelet-Synthese)

Input.

- Fourier-Koeffizienten der Projektion von f auf V_K

$$c_m^K := \langle f, \varphi_{K,m} \rangle, m \in \mathbf{Z} .$$

- Wavelet-Koeffizienten aus W_k von f

$$d_m^k := \langle f, \psi_{k,m} \rangle, m \in \mathbf{Z}, k = 1, \dots, K .$$

Output.

- Signal $f \in V_0$, repräsentiert durch seine Fourier-Koeffizienten

$$c_m^0 := \langle f, \varphi_{0,m} \rangle, m \in \mathbf{Z} .$$

Algorithmus.

$k = K$	
$k \geq 1$	
	$c^{k-1} = H^*(c^k) + G^*(d^k)$
	$k = k - 1$

Abbildung 7 Schnelle Wavelet-Synthese

Beweis. Aufgrund der orthogonalen Zerlegungen

$$V_{k-1} = V_k \oplus W_k$$

und bzgl. der ausgezeichneten Hilbert-Basen dieser Räume gilt

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}} \langle f, \varphi_{k-1,m} \rangle \varphi_{k-1,m} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} \langle f, \varphi_{k,i} \rangle \varphi_{k,i} + \sum_{i \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_{k,i} \rangle \psi_{k,i}$$

also

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbf{Z}} c^{k-1}_m \varphi_{k-1,m} &= \sum_{i \in \mathbf{Z}} (c^k_i \varphi_{k,i} + d^k_i \psi_{k,i}) \\ \sum_{m \in \mathbf{Z}} c^{k-1}_m \varphi_{k-1,m} &= \sum_{i \in \mathbf{Z}} \sum_{j \in \mathbf{Z}} (c^k_i h_j \varphi_{k-1,j+2i} + d^k_i g_j \varphi_{k-1,j+2i}) . \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich bei

$$j + 2i = m, \text{ d.h. } j = m - 2i$$

folgt

$$c^{k-1}_m = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (c^k_i h_{m-2i} + d^k_i g_{m-2i}) = H^*(c^k)_m + G^*(d^k)_m, \text{ QED.}$$

15.6 Bemerkung (Komplexität)

Im Falle

- von Signalen f mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Fourier-Koeffizienten $(c^0_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ der Anzahl n
- und der Verwendung einer festen Skalierungsfunktion mit nur endlich vielen Skalierungskoeffizienten der Anzahl $N \ll n$

hat die schnelle Wavelet-Analyse die Komplexität $O(n)$.

Beweis. [LMR1998], Kapitel 2.3. Entscheidend ist, daß sich bei jedem Skalenübergang

$$k \mapsto k+1$$

die Anzahl der von Null verschiedenen Koeffizienten $(c^k_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ in etwa halbiert.

16 Zusammenfassung

- Kapitel 1 **Hilbert-Räume**

Satz (Beste Approximation durch ein Orthonormal-System)

- Kapitel 2 **L²-Räume**

Satz (Hilbert-Raum der quadrat-summierbaren Folgen)

Satz (Hilbert-Basis der Haar'schen Funktionen)

- Kapitel 3 **Fourier-Reihen**

Satz (Gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe unter Differenzierbarkeits-Voraussetzungen)

Korollar (Hilbert-Basis der trigonometrischen Monome)

- Kapitel 4 **Fourier-Integrale**

Satz (Umkehrformel der Fourier-Transformation)

Satz (Fourier-Transformation als L²-Isomorphismus)

- Kapitel 5 **Distributionen**

Definition (Distribution)

- Kapitel 6 **Fourier-Transformation temperierter Distributionen**

Satz (Konvergenz der Dirichlet-Kerne)

- Kapitel 7 **Faltung**

Satz (Fourier-Transformation der Faltung von Funktionen)

Satz (Abtast-Theorem von Shannon)

- Kapitel 8 **Kontinuierliche Wavelet-Transformation**

Definition (Wavelet und Wavelet-Transformation)

Satz (Umkehrformel der Wavelet-Transformation)

- Kapitel 9 **Gibbsches Phänomen**

- Kapitel 10 **Schnelle Fourier-Transformation**

- Kapitel 11 **Fouriertheorie und Quantencomputing**

- Kapitel 12 **Bildkompression**

- Kapitel 13 **Wavelet-Frame**

Satz (Wavelet-Frame)

Satz (Rekonstruktion aus den Wavelet-Koeffizienten)

- Kapitel 14 **Multi-Skalen-Analyse**

Satz (*Wavelets* einer Multi-Skalen-Analyse)

Satz (Konstruktion von Skalierungsfunktionen)

- Kapitel 15 **Schnelle Wavelet-Transformation**

Algorithmus (Schnelle Wavelet-Analyse)

Algorithmus (Schnelle Wavelet-Synthese)

17 Literatur

- [AAG2000] *Ali, Syed Twareque; Antoine, Jean-Pierre; Gazeau, Jean-Pierre*: Coherent States, Wavelets and their Generalizations. Springer, New York 2000
- [Bla1998] *Blatter, Christian*: Wavelets - Eine Einführung. Vieweg, Wiesbaden 1998
- [Bur1998] *Burke Hubbard, Barbara*: The World According to Wavelets. A K Peters, Natick, Massachusetts, 2^{ed} 1998
- [BNB2000] *Bachmann, Georg; Narici, Lawrence; Beckenstein, Edward*: Fourier and Wavelet Analysis. Springer, New York et al. 2000
- [Dau1992] *Daubechies, Ingrid*: Ten Lectures on Wavelets. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics; 61. SIAM, Philadelphia 1992
- [For1983] *Forster, Otto*: Analysis 3. Integralrechnung im \mathbf{R}^n mit Anwendungen. Vieweg, Braunschweig 1983
- [For1985] *Forster, Otto*: Fourierreihen und andere Orthogonalentwicklungen der Mathematischen Physik. Vorlesung Wintersemester 1973/74. Nachdruck Mathematisches Institut der LMU, München 1985
- [Heu1986] *Heuser, Harro*: Funktionalanalysis. Teubner, Stuttgart 1986
- [HS1971] *Hirzebruch, Friedrich; Scharlau, Winfried*: Einführung in die Funktionalanalysis. Bibliographisches Institut, Mannheim et al. 1971
- [LMR1998] *Louis, Alfred; Maaß, Peter; Rieder, Andreas*: Wavelets. Theorie und Anwendungen. Teubner, Stuttgart 1998
- [Rud1973] *Rudin, Walter*: Functional Analysis. Tata McGraw-Hill. New Delhi 1973
- [Wei1976] *Weidmann, Joachim*: Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teubner, Stuttgart 1976
- [Woj1997] *Wojtaszczyk, P.*: A Mathematical Introduction to Wavelets. Cambridge University Press, Cambridge 1997