Prof. Dr. Tomasz Cieslak
Dr. Iosif Petrakis

Sommersemester 2016
01.07.2016

Analysis II für Statistiker

Probeklausur

Aufgabe 1. (a) Sind die folgenden Mengen "offene oder geschlossene" Teilmengen? Schreiben Sie "Ja" oder "Nein".
(i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < e^{-x^2}\}$.
(ii) $\{f \in C([0,1]) \mid ||f - 1||_\infty < \frac{1}{2}\}$.
(1 Punkt, wenn alle drei Antworten richtig sind)

(b) Schreiben Sie "Wahr" oder "Falsch".
(i) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-messbar.
(ii) Die Summe von zwei messbaren Funktionen ist eine messbare Funktion.
(iii) Wenn $p, q \in \mathbb{R}$, so dass $p, q \geq 1$, und $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p < \infty, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |g|^q < \infty,$$

dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |fg| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(1 Punkt, wenn alle drei Antworten richtig sind)

(c) Schreiben Sie "Wahr" oder "Falsch".
(i) Die Hessian Matrix jeder C^2-Funktion hat positive Eigenwerte.
(ii) Wenn die Hessian von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ drei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ hat, dann sind die entsprechenden Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 paarweise orthogonal.
(iii) Wenn f eine C^1-Funktion ist, dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

(1 Punkt, wenn alle drei Antworten richtig sind)

(d) Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar Funktionen, für alle $1 \leq i \leq n$, so dass

$$f(x_1, \ldots, x_n) := \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

und

$$\int_{[0,1]} f_i(x) dx = 4,$$

für alle $1 \leq i \leq n$, gilt.

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{[0,1]^n} f(x_1, \ldots, x_n) d\lambda.$$

(1 Punkt)

Aufgabe 2. **(a)** Sei $\mathbb{R}^n$ ausgestatett mit dem üblichen Skalaprodukt und seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Definieren Sie $A^\perp$ und zeigen Sie, dass $A \subseteq A \to B^\perp \subseteq A^\perp$.
(2 Punkte)
(b) Wenn $((D^2 f)x, x) > 0$, für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dann ist jeder Eigenwert von $D^2 f$ positiv.
(2 Punkte)
(c) Definieren Sie die Polarkoordinaten, schreiben Sie die Jacobi-Matrix $J(\phi)$ der Funktion $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (r, \theta)$, und berechnen Sie den Wert $|\det J(\phi)|$.
(2 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $a > 0$ und sei E definiert durch

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}\}.$$

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := x + y,$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Extremwerte von f auf E.
(5 Punkte)

Aufgabe 4. Seien die Gleichungen

$$\dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) + y,$$

$$\dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2).$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Gleichungen mithilfe von den Polarkoordinaten die folgende Form annehmen

$$\dot{r} = r(1 - r^2),$$

$$\dot{\theta} = -1.$$

(b) Wenn $(x(0), y(0)) \neq (0, 0)$, dann gibt es $\bar{t}$, so dass für alle $t > \bar{t}$ gilt $r(t) > \frac{1}{2}$.
(5 Punkte)