Bachelorarbeit

Das konstruktive Hahn-Banach Theorem

angefertigt von Daniel Markus Neumaier

29. Juni 2018

für den Studiengang

Mathematik

an der

Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

Betreuer: Dr. Iosif Petrakis (LMU München)

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Erett Albert Bishop war ein bedeutender US-amerikanischer Mathematiker, denn er hat eine eigene ganz neue Art von Mathematik entwickelt, die konstruktive Mathematik. Diese Art von Mathematik ist sehr vielen nicht bekannt, auch viele Mathematiker wissen davon nichts. Allerdings ist es ein sehr erwähnenswertes Teilgebiet der Mathematik und einige halten diese sogar für die wahre Mathematik, weshalb sie nicht ganz im Schatten bleiben sollte. Deswegen ist diese Arbeit auch als Hinführung zu dieser besonderen Mathematik gedacht

Da die konstruktive Mathematik zu viele Themengebiete hat, um sie in eine Bachelorarbeit zu stecken, werden wir uns hier nur auf ein Theorem spezialisieren: Das Hahn Banach Theorem. Dieses Theorem ist ein wichtiger Bestandteil der Funktionalanalysis und spielt auch eine wesentliche Rolle für viele andere Theoreme, zum Beispiel für den Trennungssatz. Deswegen wird sich der Hauptkern dieser Arbeit um dieses Theorem in der konstruktiven Mathematik drehen.

Zuerst wird das Theorem in der klassischen Mathematik bewiesen, damit man einen Vergleich zwischen dem konstruktiven und dem klassischen Theorem hat. Damit man dann letztendlich das Theorem in der konstruktiven Mathematik verstehen kann, werden danach die konstruktive Mathematik und wichtige Hilfssätze näher erläutert, um dann schließlich die Arbeit mit dem konstruktiven Theorem zu vollenden.

1 Das Klassische Hahn-Banach Theorem

Um den Hauptkern dieser Arbeit verstehen zu können, müssen wir uns als erstes natürlich den klassischen Beweis des Hahn-Banach Theorems anschauen. Bis auf ein paar Definitionen benötigt dieses Theorem nicht sehr viel Vorarbeit, wenn man mit dem Lemma von Zorn vertraut ist. Zuerst schauen wir uns einmal die dafür nötigen Definitionen an.

1.1 Definition

Seien E und F zwei normierbare Vektorräume und $u : E \to F$ eine Funktion. u heißt linear genau dann, wenn

$$\forall_{x,y\in E}\ \forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}}\ \Big(u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)\Big)$$

Definiere

$$\|u\| := \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E=1}} \|u(x)\|_F$$

Wir nennen u beschränkt genau dann, wenn $\|u\| < \infty$.
Außerdem sei $L(E,F) = \{u : E \to F : u \text{ linear und beschränkt}\}$ der Vektorraum, der linearen und beschränkten Funktionen. Falls $F = \mathbb{R}$ so nennen wir u ein lineares Funktional. In diesem Falle ist dann $\|u\| = \sup\limits_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{|u(x)|}{\|x\|_E}$

1.2 Definition: sublineares Funktional

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine sublineare Funktion auf X ist eine Funktion $p : X \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften
$(i)\forall_{x,y\in X}\ \Big(\ p(x+y) \leq p(x) + p(y)\ \Big)$
$(ii)\ \forall_{\alpha\geq 0,x,\in X}\ \Big(\ p(\alpha x) = \alpha p(x)\Big)$

Jetzt haben wir schon alle nötigen Definitionen für den Beweis des Hahn Banach Theorems. Also können wir uns jetzt die klassische Variante anschauen.

1.3 Hahn-Banach Theorem

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und sei $p : X \to \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional auf X. Sei Y ein Unterraum von X und sei $u : Y \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional, so dass $u(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Dann existiert ein lineares Funktional $v : X \to \mathbb{R}$, so dass $u(y) = v(y)$ für alle $y \in Y$ und $v(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis. Falls $X = Y$, dann brauchen wir nichts beweisen. Sei nun $X \neq Y$, dann existiert ein $a \in X$ mit $a \notin Y$. Sei $Y_1 =< \{Y, a\} >$, also Y_1 wird durch Y und a aufgespannt. Nun zeigen wir erstmal, das es ein lineares Funktional $u_1 : Y_1 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $u_1(y) = u(y)$ für alle$y \in Y$ und $u_1(y_1) \leq p(y_1)$ für alle $y_1 \in Y_1$. Dafür müssen wir schauen, wie u_1 definiert sein muss. Wenden wir die Linearitätseigenschaft von u an, so erhalten wir für $y, z \in Y$

$$\begin{aligned}
u(y) + u(z) &= u(y + z) \\
&\leq p(y + z) \\
&= p(y - a + z + a) \\
&\leq p(y - a) + p(z + a) \\
&\Rightarrow u(y) - p(y - a) \leq p(z + a) - u(z) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Definiere nun
$b := \sup\{u(y) - p(y - a) : \ y \in Y\}$
$c := \inf\{p(z + a) - u(z) : \ y \in Y\}$
Dann gilt $b \leq c$ wegen (1). Wähle nun $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $b \leq \alpha \leq c$. Nun können wir unser gewünschtes u_1 definieren und zwar für $y_1 = y + ta \in Y_1$ mit $t \in \mathbb{R}$ ist $u_1(y_1) = u(y) + t\alpha$.
Offensichtlich ist u_1 linear, da auch u linear ist. Außerdem gilt $t = 0$ für $y \in Y$, da a nicht im Spann von Y liegt, weshalb $u_1(y) = u(y)$ folgt. Bleibt also nur noch zu zeigen, dass $u_1(y_1) \leq p(y_1)$ ist. Sei also $y_1 \in Y_1$, dann ist $y_1 = y + ta$ für eindeutige $y \in Y$ und $t \in \mathbb{R}$. Für $t = 0$ gilt $y_1 \in Y$ und die Ungleichung ist klar. Sei nun $t > 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
u_1(y_1) &= u(y) + \alpha t \\
&\leq u(y) + tc \\
&\leq u(y) + t(p(\frac{y}{t} + a) - u(\frac{y}{t})) \\
&= u(y) + p(t\frac{y}{t} + ta) - u(t\frac{y}{t}) \\
&= p(y + ta) \\
&= p(y_1)
\end{aligned}$$

und für $t < 0$ berechnen wir

$$
\begin{aligned}
u_1(y_1) &= u(y) + \alpha t \\
&\leq u(y) + tb \\
&\leq u(y) + t(u(\frac{y}{-t}) - p(\frac{y}{-t} - a)) \\
&= u(y) + p(-t\frac{y}{-t} - (-t)a) + u(t\frac{y}{-t}) \\
&= u(y) + p(y + ta) - u(y) \\
&= p(y + ta) \\
&= p(y_1)
\end{aligned}
$$

Also insgesamt $u_1(y_1) \leq p(y_1)$, womit u_1 die gewünschten Eigenschaften erfüllt.

Betrachte nun die Menge M von allen Paaren (W, s), wobei W ein Unterraum von X ist, der Y enthält, und $s : W \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional, für das $s(w) \leq p(w)$ für alle $w \in W$ und $s(y) = u(y)$ für alle $y \in Y$ gilt. Dann ist M nicht leer, da $(Y_1, u_1) \in M$. Definiere außerdem eine Partialordnung auf M durch

$$(W_1, s_1) \leq (W_2, s_2) \Leftrightarrow W_1 \subset W_2 \ \wedge \ \forall_{w_1 \in W_1} \Big(s_1(w_1) = s_2(w_1)\ \Big)$$

Dann ist jede total geordnete Teilmenge von M nach oben beschränkt und Zorns Lemma liefert uns ein maximales Element $(W, v) \in M$. Bleibt noch zu zeigen, dass $W = X$ gilt. Angenommen es gilt $W \neq X$, dann gibt es ein $d \in X/W$ und sei $W_1 =< W_1, d >$. Dann können wir mit dem selbem Verfahren wie oben ein $v_1 : W_1 \to \mathbb{R}$ finden, sodass $v(w) = v_1(w)$ für alle $w \in W$, allerdings gilt dann auch $(W, v) \leq (W_1, v_1)$ und $W \neq W_1$, was der Maximalität von (W, v) widerspricht. Also gilt $W = X$ und v ist unser gesuchtes lineares Funktional. $\square$

Am Interessantesten ist hierbei die Art wie das Hahn Banach Theorem bewiesen wurde. Wie ich noch später erläutern werde, gibt es für die konstruktive Version zwei Probleme, und zwar die Definitionen von b, c und das Lemma von Zorn.

Zuerst müssen wir uns jetzt aber erst noch das Theorem für normierte Räume anschauen. Diese besagt nämlich, dass sich die Norm des Funktionals u nicht ändert wenn man es fortsetzt und hebt die Bedingung der sublinearen Funktion auf. Später in der konstruktiven Version wird es nämlich um diese Version gehen, weshalb die klassische Variante betrachtet werden muss.

Das folgende Lemma werden wir für die normierte Version brauchen.

1.4 Lemma

Seien E, F normierbare Räume und $u \in L(E, F)$, dann gilt

$$\forall_{x \in E} \left(\|u(x)\| \leq \|u\| \|x\| \right)$$

Außerdem gilt $\|u\| = \inf\{a > 0 : \forall_{x \in E}(\|u(x)\|_F \leq a\|x\|_E)\}$

Beweis. Sei $x \in E$. Falls $x = 0$, dann gilt $u(x) = u(0) = 0$, da u linear ist und somit $\|u(x)\| = 0$ womit die Ungleichung hält. Falls $x \neq 0$, dann gilt die Ungleichung nach der Definition von $\|u\|$, da es sich um ein Supremum handelt.
Für die zweite Aussage, sei $\alpha = \inf\{a > 0 : \forall_{x \in E}(\|u(x)\|_F \leq a\|x\|_E)\}$. Dann gilt wegen erster Aussage schon $\|u\| \geq \alpha$. Für $a \in \mathbb{R}$ und $\|u(x)\| \leq a\|x\|$ gilt dann $\|u(x)\| \leq a$ für alle $x \in E$ mit $\|x\| = 1$, also ist a eine obere Schranke für $\|u\|$ und deswegen folgt dann auch $\|u\| \leq \alpha$. □

Falls in Lemma 1.4 $F = \mathbb{R}$ gilt, dann lautet die Ungleichung $|u(x)| \leq \|u\|\|x\|$

1.5 Korollar

Sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ und Y ein Unterraum von X. Sei $u : Y \to \mathbb{R}$ ein beschränktes lineares Funktional. Dann existiert ein lineares Funktional $v : X \to \mathbb{R}$ mit $\forall_{y \in Y} \left(u(y) = v(y)\right)$ und $\|u\| = \|v\|$.

Beweis. Sei $a := \|u\|$, dann gilt $a < \infty$ wegen der Beschränktheit von u. Definiere ein sublineares Funktional $p : X \to \mathbb{R}$ durch $p(x) = a\|x\|$. Dann gilt nach Lemma 1.4 $\forall_{y \in Y}(|u(y)| \leq p(y))$ und damit $u(y) \leq p(y)$. Nach dem Hahn Banach Theorem gibt es also ein lineares Funktional $v : X \to \mathbb{R}$, so dass $\forall_{x \in X}(v(x) \leq p(x))$ mit $\forall_{y \in Y}(v(y) = u(y))$. Bleibt zu zeigen, dass $\|u\| = \|v\|$ gilt. Es gilt wegen $Y \subset X$

$$\begin{aligned}
\|v\| &= \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|v(x)|}{\|x\|} \\
&\geq \sup_{\substack{x \in Y \\ x \neq 0}} \frac{|v(x)|}{\|x\|} \\
&= \sup_{\substack{x \in Y \\ x \neq 0}} \frac{|u(x)|}{\|x\|} \\
&= \|u\|
\end{aligned}$$

Außerdem gilt für alle $x \in X : -v(x) = v(-x) \leq p(-x) = a\| - x\| = a\|x\|$ also $|v(x)| \leq p(x)$. Damit gilt also $|v(x)| \leq a\|x\|$ und nach Lemma 1.4 folgt dann $\|v\| \leq a$. □

2 Wichtige Vorbereitungen aus der konstruktiven Analysis

2.1 Über konstruktive Analysis

Wie früher schon erwähnt, bewegen wir uns jetzt im Bereich der konstruktiven Analysis. Wenn wir einen Beweis in konstruktiver Analysis führen wollen, dann müssen wir uns die Lösungen der Probleme und Objekte durch eine Algorithmus oder Ähnlichem genau konstruieren können. Die konstruktive Mathematik kommt also mit der intuitionistischen Logik aus, welche besagt, dass ein Widerspruch der Negation der Aussage kein Beweis für die Aussage selbst ist. Das bedeutet für eine Aussage P ist $\neg\neg P \to P$ nicht zulässig, also ist ein Widerspruchsbeweis nicht zulässig.
Das verdeutlichen wir jetzt an einem Beispiel. Sehen wir uns dafür den Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlen an. Der klassische Beweis sieht ungefähr so aus:

Angenommen es gäbe nur endlich viele Primzahlen $\{p_1, ..., p_n\}$. Definiere wir nun die Zahl $p = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$, dann ist keine der Zahlen $p_1, ..., p_n$ ein Teiler von p und damit muss p auch eine Primzahl sein, im Widerspruch zur Annahme, was den Beweis vervollständigt.

In der konstruktiven Mathematik ist dieser Beweis unzulässig, da er aus der Negierung der Unendlichkeit der Primzahlen einen Widerspruch herleitet, also eine Beweis der Form $\neg\neg P \to P$ führt. Deswegen muss der Beweis hier anders geführt werden. Wie im obigen Beweis zu sehen, wird die Zahl p dort mithilfe von $p_1, ..., p_n$ definiert, also wird sie konstruiert, was uns den Beweis für die konstruktive Mathematik liefert:

Sei P die Menge der Primzahlen, dann können wir uns mithilfe dieser Methode für jede endliche Teilmenge $N \subset P$ eine neue Primzahl konstruieren, die nicht in N liegt, womit wir die Unendlichkeit von P erhalten.

Also haben wir auch einen Beweis für die konstruktive Analysis.

Ein wichtiger Unterschied zwischen klassischer und konstruktiver Mathematik ist der $\exists$-Quantor. Will man einen Beweis für die Existenz eines Objekts x in der klassischen Mathematik führen, dann reicht es, wenn man die Nicht-

Existenz zu einem Widerspruch führt. In der konstruktiven Mathematik muss man sich dieses Objekt x aus den Gegebenheiten konstruieren können. Dies bringt natürlich einige Schwierigkeiten mit sich. Schauen wir uns zum Beispiel mal den Zwischenwertsatz an:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, dann existiert ein Wert $c \in]a, b[$ mit $f(c) = 0$

Für jede beliebige Funktion eine solche Nullstelle anzugeben oder zu konstruieren ist nicht möglich, weshalb dieser Satz so erstmal nicht auf konstruktive Weise bewiesen werden kann.

Ein weiterer wichtiger Punkt betrifft das Auswahlaxiom. Dieses besagt, dass zu jeder Menge von nichtleeren Mengen eine sogenannte Auswahlfunktion existiert, also eine Funktion, die jeder dieser nichtleeren Mengen ein Element derselben zuordnet. In der konstruktiven Analysis haben wir hier ein Problem, denn hier haben wir die Existenz dieser Auswahlfunktion nicht, da sie im Allgemeinen nicht konstruierbar ist. Also ist auch das Auswahlaxiom in der konstruktiven Analysis unzulässig, und wir können somit keinen Satz verwenden, der in klassischer Weise mit dem Auswahlaxiom bewiesen wurde, beispielsweise das Lemma von Zorn. Insofern muss das Hahn Banach Theorem in der konstruktiven Analysis neu bewiesen werden. Ein weiteres Problem bei dem klassischen Beweis ist, dass wir hier sofort von der Existenz des Infimums und Supremums ausgehen, wenn die Menge beschränkt ist. Dies ist im Konstruktiven unzulässig, da nicht immer das Supremum oder Infimum einer Menge konstruiert werden kann. Ein Beispiel dafür folgt später.

Zuletzt wollen wir uns noch anschauen, wie man im Konstruktiven etwas von der Form $\neg P$ zeigt, also wie man im Konstruktiven etwas widerlegt. Grundsätzlich gibt es die Möglichkeit $P \to \perp$ zu zeigen, wobei $\perp$ dem Falsum entspricht, was auch zulässig ist. Allerdings gibt es auch die Möglichkeit ein sogenanntes schwaches Gegenbeispiel anzugeben, das bedeutet, man kann nicht im konstruktiven Bereich $\neg P$ beweisen, aber dafür kann man aus P ein Tabu in der konstruktiven Analysis folgern. Ein solches Tabu ist, wie oben schon erwähnt, zum Beispiel $\neg\neg P \to P$. $P \vee \neg P$ ist äquivalent zu $\neg\neg P \to P$, deswegen ist dies auch ein Tabu. Zwei weitere Tabus, die wir später noch brauchen werden, werden mit LPO und LLPO bezeichnet.
Die LPO Aussage, sieht folgendermaßen aus:

$$\forall a \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \left(\forall n(a_n = 0) \vee \exists n(a_n = 1)\right)$$

wenn $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
In Worten: Jede Binärfolge enthält entweder nur 0-en oder mindestens eine 1.

Die LLPO Aussage sieht sehr ähnlich aus:

In Worten: Für jede Binärfolge $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit höchstens einer 1, gilt $a_{2n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ oder $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, das heißt:

$$\forall a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ mit } \#\{n \in N : a_n = 1\} \leq 1 \, \Big(\forall n(a_{2n} = 0) \vee \forall n(a_{2n+1} = 0)\Big)$$

Im der klassischen Mathematik sind die beiden Aussagen trivialerweise richtig, allerdings müssen wir uns in der konstruktiven Analysis die Lösung durch einen Algorithmus konstruieren können. Hierbei wird klar, warum LPO im Konstruktiven nicht gilt, denn ich kann durch einen Algorithmus nicht alle unendlich vielen Binärzahlen in der Folge überprüfen, ob sie 0 sind, oder ob sie nicht schließlich doch eine 1 enthält. Jetzt gehen wir dann aber erstmal näher auf die hier verwendete Mathematik ein.

2.2 Über Bishops kontruktive Analysis

Das komplette Kapitel benutzt Bishop's Mathematik, weswegen nicht unerwähnt bleiben sollte, was das genau ist. Erret Bishop war ein bedeutender Mathematiker im 20. Jahrhundert, der die konstruktive Mathematik sehr geprägt hat. Die Mathematik, die Bishop verwendet, hat einen besonderen Punkt. Im Laufe der Zeit und vor Bishop haben sich noch Brouwer's Intuitionistische Mathematik und der Russian Konstruktivismus entwickelt. Beide haben das Problem, dass sie sich nicht mit der klassischen Mathematik vertragen. Zum Beispiel kann man bei beiden beweisen, dass jede reelle Funktion auf dem Intervall $[0, 1]$ punktweise stetig ist. Bishop's Mathematik allerdings vermeidet das. Das bedeutet, dass jede Aussage, die in Bishop's Mathematik bewiesen wird, auch für die klassische Mathematik gilt.

Der eigentliche besondere Punkt ist aber, dass sich Bishop's Mathematik mit der Intuitionistischen Logik von Brouwer und mit dem Russian Konstruktivismus verträgt, sprich Bishop's Mathematik ist in der Schnittmenge der klassischen Mathematik, der intuitionistischen Logik von Brouwer und dem Russian Konstruktivismus, also ist für jeden dieser Bereiche ein Beweis von Bishop zulässig.

2.3 Besondere Eigenschaften konstruktiver Analysis bezüglich des Hahn Banach Theorems

Nun wollen wir uns aber der konstruktiven Mathematik widmen. Ein erster wichtiger Punkt ist hierbei der Begriff der lokalisierten Menge, welcher eine zentrale Rolle spielen wird. In der klassischen Mathematik ist diese Definition nicht nötig, da jedes Objekt diese Eigenschaft erfüllt

2.3.1 Definition

Sei X ein metrischer Raum und $S \subset X$ nicht leer. Dann nennen wir S lokalisiert genau dann, wenn $d(x, S) = \inf\{d(x, s) : s \in S\}$ existiert für jedes $x \in X$

In der konstruktiven Mathematik können wir nicht beweisen, dass bei jeder beschränkten Teilmenge in $\mathbb{R}$ das Infimum und Supremum existieren, weshalb auch hier der Begriff der lokalisierten Menge eine Rolle spielt.
Schauen wir uns doch mal ein Beispiel einer nicht lokalisierten Menge an. Zu diesem Zweck sei P eine beliebige Aussage und betrachten die Menge

$$M = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid (x = 1) \wedge P\}$$

Wenn wir nun annehmen, dass M lokalisiert ist, dann gilt entweder $d(1, M) < 1$ oder $d(1, M) > 0$. Für den ersten Fall können wir ein $m \in M$ wählen, so dass $d(1, m) < 1$ gilt. Also muss $m \notin \{0\}$ gelten, womit $m = 1$ und P gilt. Für den zweiten Fall muss $1 \notin \{x \in \mathbb{R} \mid (x = 1) \wedge P\}$ gelten, was unmittelbar $\neg P$ impliziert.
Insgesamt haben wir also gezeigt, dass gilt: M lokalisiert $\Rightarrow P \vee \neg P$. Dies ist aber ein schon angesprochenes Tabu in der konstruktiven Mathematik, weshalb wir nicht davon ausgehen können, dass M lokalisiert ist.

Wir wissen außerdem nicht, dass die Norm aus Definition 1.1 existieren muss, auch wenn das lineare Funktional beschränkt ist, da es sich um ein Supremum handelt.

2.3.2 Definition

Seien X und Y normierte Räume und $u : X \to Y$ ein beschränktes lineares Funktional, dann nennen wir u normierbar, wenn $\|u\|$ aus Definition 1.1 existiert.

Auch hier wollen wir zeigen, dass nicht jede beschränkte Funktion normierbar ist. Nehmen wir also an, dass jedes beschränkte Funktional auf dem Folgenraum l^2 normierbar ist. Sei außerdem α eine Binärfolge mit höchstens einer eins. Betrachte das Funktional $f : l^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k \text{ mit } x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2$$

Dann gilt

$$|f(x)| \leq \|x\|_2$$

woraus dann folgt, dass f beschränkt ist. Wenn f nun normierbar ist, dann gilt entweder $\|f\| > 0$ oder $\|f\| < 1$. Wenn nun $\|f\| > 0$ gilt, dann muss es ein $x \neq 0$ geben, sodass $f(x) > 0$ ist. Dies ist nur der Fall, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a_k > 0$, also $a_k = 1$. Für den Fall $\|f\| < 1$ betrachten wir für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ den Einheitsvektor $e_n \in l^2$ mit $(e_n)_m = \delta_{n,m}$. Dann gilt

$$f(e_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k = \alpha_n$$

Da nun $\|e_n\|_2 = 1$ und $\|f\| < 1$, muss nach Definition von $\|f\|$ $f(e_n) < 1$ gelten, also $\alpha_n < 1$. Daraus folgt $\alpha_n = 0$. Da nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt $\alpha = 0$.
Insgesamt haben wir also gezeigt:
Falls jedes beschränkte Funktional normierbar ist, dann gilt LPO. Daraus folgt also, dass wir nicht annehmen können, dass jedes Funktional normierbar ist.

Als nächstes widmen wir uns erst einmal der nötigen Vorarbeit für das Theorem. Denn wir werden später für das Hahn Banach Theorem brauchen, dass ein Funktional genau dann normierbar ist, wenn der Kern lokalisiert ist. Deswegen beweisen wir das nach einem dafür nötigem Lemma.

2.3.3 Lemma

Seien X und Y normierte Räume und $u : X \to Y$ ein lineares beschränktes Funktional. Dann ist der Kern von u lokalisiert genau dann, wenn

$$n_x = \inf\{t : t > 0 \text{ und } u(x) \in tu(B_X)\}$$

für jedes $x \in X$ existiert, wobei $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Falls $u(x) \neq 0$, dann gilt außerdem $n_x > 0$

Beweis. Dafür zeigen wir erstmal die Gleichheit folgender zwei Mengen:

$$\{t > 0 : \exists y \in ker(u) \text{ mit } \|x - y\| < t\} = \{t > 0 : u(x) \in tu(B_X)\}$$

"$\subset$": Sei t > 0 so, dass es ein $y \in ker(u)$ existiert mit $\|x - y\| < t$. Wähle $z = \frac{x-y}{t}$, dann gilt $\|z\| < 1$ und $u(x - tz) = u(x - (x - y)) = u(y) = 0$. Da nun $z \in B_X$ und $u(x) = u(tz) = tu(z)$, folgt schon $u(x) \in tu(B_X)$

"$\supset$": Umgekehrt sei t > 0 mit $u(x) \in tu(B_X)$. Sei $z = \frac{x}{t}$, dann gilt wegen Linearität $tu(z) = u(x)$, also $u(z) \in u(B_X)$ und damit $z \in B_X$. Außerdem wenn wir $y = x - tz$ wählen, dann gilt $u(y) = u(x - tz) = u(x - x) = 0$. Deswegen $y \in ker(u)$ und $\|x - y\| = \|tz\| < t$.

Wenn nun $ker(u)$ lokalisiert ist, dann existiert das Infimum der ersten Menge, also somit auch das Infimum der zweiten Menge, welches genau n_x entspricht. Wenn umgekehrt das Infimum der zweiten Menge existiert, dann auch das Infimum von der ersten und damit ist $ker(u)$ lokalisiert.

Angenommen es gilt $u(x) \neq 0$. Für jedes $y \in Y$ gilt $|u(y)| \leq \|u\|\|y\|$ und deswegen können wir $r = \frac{|u(x)|}{\|u\|}$ setzen, womit dann folgt, dass

$$\forall_{\|y\|<r}(|u(y)| < |u(x)|)$$

Wähle ein $t < r$, dann gilt $\|tz\| < r$ für jedes $z \in B_X$ und damit folgt $|u(tz)| < |u(x)|$, also insgesamt $t \notin \{t > 0 : u(x) \in tu(B_X)\}$, woraus dann folgt, dass $n_x \geq r > 0$ gilt. $\square$

2.3.4 Proposition

Sei $u \neq 0$ ein lineares Funktional. Dann ist u genau dann normierbar, wenn der Kern von u lokalisiert ist.

Beweis. Nun zeigen wir zuerst, dass der Kern von u lokalisiert ist, wenn u normierbar ist. Da $u \neq 0$ gilt, muss $\|u\| > 0$ gelten. Sei nun $a \in X$. Dann gilt für alle $x \in ker(u)$ nach Definition $\|u\| \geq \frac{|u(a-x)|}{\|a-x\|}$ und damit folgt:

$$\begin{aligned}\|a - x\| &\geq \frac{|u(a-x)|}{\|u\|} \\ &= \frac{|u(a) - u(x)|}{\|u\|} \\ &= \frac{|u(a)|}{\|u\|}\end{aligned}$$

Sei nun $\epsilon > 0$ klein genug, so dass $\epsilon < \|u\|$ gilt. Nun können wir einen Vektor x_0 mit $\|x_0\| = 1$ so wählen, dass $u(x_0) > \|u\| - \epsilon$. (Dies können wir tun, da $\|u\| = \sup\{|u(x)| : \|x\| = 1\}$). Sei nun

$$z = a - \frac{u(a)}{u(x_0)} x_0$$

dann gilt $u(z) = u(a) - \frac{u(a)}{u(x_0)} u(x_0) = 0$, weswegen $z \in ker(u)$ folgt. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\|a - z\| &= \left\| a - a - \frac{u(a)}{u(x_0)} x_0 \right\| \\ &= \frac{|u(a)|}{u(x_0)} \|x_0\| \\ &= \frac{|u(a)|}{u(x_0)} \\ &< \frac{|u(a)|}{\|u\| - \epsilon}\end{aligned}$$

Also haben wir gezeigt, dass für jedes Element im Kern von u der Abstand von a größer gleich $\frac{|u(a)|}{\|u\|}$. Erhöhen wir diesen Abstand um eine beliebig kleine Zahl z, so finden wir ein Element im Kern welchen kleineren Abstand hat als $\frac{|u(a)|}{\|u\|} - z$. Also ist $\inf d(a, ker(u)) = \frac{|u(a)|}{\|u\|}$ und existiert somit. Da a beliebig war ist der Kern von u lokalisiert.

Sei nun der Kern von u lokalisiert. Dann gilt wegen Lemma 2.3.3, dass

$$z = \inf\{t > 0 : 1 \in tu(B_X)\}$$

existiert und größer 0 ist. Nehmen wir ein beliebiges $x \in B_X$, dann gilt $u(x) \leq 1/z$ oder $u(x) \neq 0$. Für den zweiten Fall betrachte $y := \frac{|u(x)|}{u(x)} x$, dann gilt

$$\begin{aligned} \|y\| &= \left\| \frac{|u(x)|}{u(x)} x \right\| \\ &= \frac{|u(x)|}{|u(x)|} \|x\| \\ &= \|x\| \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

und außerdem

$$\frac{1}{|u(x)|} u(y) = \frac{1}{|u(x)|} \frac{|u(x)|}{u(x)} u(x) = 1$$

Da $y \in B_X$ gilt, gilt $u(y) \in u(B_X)$, also gilt

$$\frac{1}{|u(x)|} \geq \inf\{t > 0 : 1 \in tu(B_X)\} = z$$

Durch Umstellen gelangen wir zu $|u(x)| \leq \frac{1}{z}$.
$\Rightarrow \frac{1}{z}$ ist obere Schranke von $\|u\|$
Wenn wir ein $0 < \epsilon < \frac{1}{z}$ haben, dann wählen wir

$$z_0 < \frac{z}{1 - \epsilon z}$$

und $x \in B_X$ so, dass $1 = z_0 u(x)$. Dann folgt:

$$u(x) = \frac{1}{z_0} > \frac{1 - \epsilon z}{z} = \frac{1}{z} - \epsilon$$

Also haben wir insgesamt gezeigt, dass $\|u\| = \frac{1}{z}$, was den Beweis abschließt. $\square$

Das war jetzt der erste wichtige Teil, den wir später im Beweis vom Hahn Banach Theorem benutzen werden. Der zweite wichtige Teil bezieht sich auf total beschränkte Mengen, da man bei diesen sagen kann, dass das Supremum in $\mathbb{R}$ immer existiert. Also werden wir diese jetzt definieren und dann damit verbundene wichtige Sätze beweisen.

Definition 2.3.5: Total beschränkter Raum Sei X metrischer Raum $\epsilon > 0$, dann verstehen wir unter einer ϵ -Approximation einer Teilmenge Y eine Teilmenge $Z \subset Y$, sodass

$$\forall_{y \in Y} \left(\exists_{z \in Z} (d(y,z) < \epsilon) \right)$$

Falls für jedes $\epsilon > 0$ eine endliche ϵ-Approximation existiert, dann nennen wir Y auch total beschränkt.

Beispielsweise ist jeder abgeschlossene Ball aus $\mathbb{R}^n$ eine total beschränkte Menge, wobei die Metrik der euklidischen Metrik entspricht, da er kompakt ist im topologischen Sinne und sich deswegen von endlich vielen ϵ-Bällen überdecken lässt für beliebiges $\epsilon > 0$

Wir nennen X lokal total beschränkt, wenn jede beschränkte Teilmenge aus X in einer total beschränkten Teilmenge enthalten ist.

Lemma 2.3.6
Für jede total beschränkte Menge $Y \subset \mathbb{R}$ existiert das Supremum und das Infimum.

Beweis. Hier werden wir ohne Beweis das konstruktive Theorem für das Prinzip der kleinsten oberen Schranke benutzen, welches so aussieht: Eine nichtleere Menge $S \subset \mathbb{R}$, welche nach oben beschränkt ist und für alle Zahlen x, y mit $x < y$

$$\forall_{s \in S} (s \leq x) \text{ oder } \exists_{s \in S} (y < s)$$

erfüllt, hat ein Supremum.
Zuerst betrachten wir den Fall, dass S endlich ist. Sei also $S = \{s_1, ..., s_n\}$. Für zwei Zahlen x, y mit $x < y$ gilt dann entweder $s_k < x$ für alle $k = 1, ..., n$ oder es gibt ein $j \in \{1, ..., n\}$ mit $s_j > y$, womit die Voraussetzungen des Theorems erfüllt sind, und das Supremum somit existiert.

Nun sei S eine beliebige Menge. Seien wieder $x < y$ reelle Zahlen und setze $\epsilon = \frac{x-y}{2} > 0$. Da S total beschränkt ist, finden wir eine endliche ϵ-Approximation, die wir durch $\{s_1, ..., s_n\}$ darstellen. Wegen dem ersten Fall existiert

$$\alpha = \sup\{s_1, ..., s_n\}$$

Nun gilt entweder $\alpha > y$ oder $\alpha < y + \epsilon$. Für den ersten Fall haben wir wegen der Definition von α also ein $s_j \in S$ mit $s_j > y$. Für den zweiten Fall wollen wir zeigen, dass $\forall_{s \in S} (s \leq x)$ gilt. Sei also $s \in S$. Dann existiert wegen der

ϵ-Approximation ein $k \leq n$ mit $|s - s_k| < \epsilon$. Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} s &\leq |s_k| + |s - s_k| \\ &< \alpha + \epsilon \\ &< y + 2\epsilon \\ &= x \end{aligned}$$

Also haben wir wieder die Voraussetzungen des Theorems erfüllt und damit existiert das Supremum. □

Lemma 2.3.7
Wenn X ein lokal total beschränkter metrischer Raum und Y ein lokalisierte Teilmenge ist, dann ist Y lokal total beschränkt.

Beweis. Für diesen Beweis, zeigen wir erst einmal eine wichtige Behauptung: Sei T eine total beschränkte Teilmenge von X. Dann existiert eine total beschränkte Menge S, so dass

$$T \cap Y \subset S \subset Y$$

Beweis der Behauptung:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Da T total beschränkt ist, gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine endliche $\frac{1}{n}$-Approximation, welche wir durch T_n bezeichnen. Da Y lokalisiert ist, hat jeder Punkt in X einen Abstand zu Y. Deswegen können wir $T_n = A_n \cup B_n$ schreiben, sodass für jedes $t \in T$ gilt

$$\begin{aligned} t \in A_n &\Leftrightarrow d(t, Y) < \frac{3}{n} \\ t \in B_n &\Leftrightarrow d(t, Y) > \frac{3}{2n} \end{aligned}$$

A_n und B_n sind dann endlich, da T_n endlich sind, und wegen $\frac{3}{n} > \frac{3}{2n}$ gilt auch $T_n = A_n \cup B_n$.
Nun nehmen wir für jedes $t \in A_n$ ein $y_{t,n} \in Y$, sodass $d(t, y_{t,n}) < \frac{3}{n}$. Nun können wir unser gesuchtes S definieren über

$$\begin{aligned} S_n &= \{y_{n,t} \mid t \in A_n\} \\ \text{und } S &= \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n} \end{aligned}$$

Dann ist S nach Definition in Y enthalten. Zeige nun, dass S total beschränkt ist. Dafür zeigen wir, dass $\bigcup_{i=1}^{6m} S_i$ eine endliche $\frac{9}{2m}$- Approximation ist. Sei also $s \in S$ beliebig. Dann gilt $s \in S_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$
Fall 1: $n < 6m$
In diesem Fall folgt bereits, dass $s \in \bigcup_{i=1}^{6m} S_i$ gilt, womit der Fall trivial ist.

Fall 2: $n \geq 6m$
Wir haben also ein $t \in T_n$ mit $d(s,t) < \frac{3}{n}$ und, da T_m eine $\frac{1}{m}$ -Approximation ist, gilt $d(t, T_m) < \frac{1}{m}$, also folgt insgesamt

$$\begin{aligned} d(s, T_m) &\leq d(s,t) + d(t, T_m) \\ &< \frac{3}{n} + \frac{1}{m} \\ &\leq \frac{1}{2m} + \frac{1}{m} \\ &= \frac{3}{2m} \end{aligned}$$

Sei nun $\tilde{t} \in T_m$, so dass $d(s, \tilde{t}) < \frac{3}{2m}$. An der Definition von A_m und B_m können wir ablesen, dass $\tilde{t} \in A_m$. Also folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} d(s, y_{m,\tilde{t}}) &\leq d(s, \tilde{t}) + d(\tilde{t}, y_{m,\tilde{t}}) \\ &< \frac{3}{2m} + \frac{3}{m} \\ &= \frac{9}{2m} \end{aligned}$$

Da nun $\bigcup_{i=1}^{6m} S_i$ endlich ist, ist S total beschränkt.

Bleibt also nur noch die Inklusion $T \cap Y \subset S$ zu zeigen. Sei dafür $x \in T \cap Y$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gibt es wegen, der total Beschränktheit von T ein $t \in T_n$, so dass $d(x,t) < \frac{1}{n}$ gilt. Also gilt $d(t, Y) < \frac{1}{n} \frac{3}{2n}$ woraus wir schließen können, dass $t \in A_n$ gilt. Für $y_{n,t} \in S$ gilt, dann

$$\begin{aligned} d(s, y_{n,t}) &\leq d(s,t) + d(t, y_{n,t}) \\ &< \frac{1}{n} + \frac{3}{n} \\ &= \frac{4}{n} \end{aligned}$$

Da n beliebig und S abgeschlossen ist, folgt $x \in S$, womit der Beweis der Behauptung abgeschlossen ist.

Sei also X lokal total beschränkt. Sei A eine beschränkte Teilmenge in Y. Da X lokal total beschränkt ist, gibt es eine total beschränkte Teilmenge T mit $A \subset T$. Wegen unser vorangegangenen Behauptung gibt es ein $S \subset Y$, so dass $T \cap Y \subset S$, also $A \subset S$. Daraus folgt, dass Y lokal total beschränkt ist. $\square$

Proposition 2.3.8
Die folgenden zwei Aussagen sind für einen metrischen Raum X äquivalent:

(i) X ist lokal total beschränkt

(ii) X ist endlich dimensional

Da dieser Beweis noch einige andere Definitionen und Sätze benötigen würde, lassen wir den Beweis hier aus und konzentrieren uns stattdessen auf das letzte benötigte Lemma.

Lemma 2.3.9
Sei X ein normierter Raum und Y ein endlich dimensionaler metrischer Raum mit Basis $\{b_1, ..., b_{n-1}\}$ und b_n ein Vektor mit $d(b_n, Y) > 0$. Dann ist die Menge $\{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis zu ihrem Spann.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $b_1, ..., b_n$ linear unabhängig sind. Betrachten wir dafür λ_i für $1 \leq i \leq n$. Wir zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| > 0 \;\Rightarrow\; \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\| > 0$$

was die lineare Unabhängigkeit impliziert, da eine Norm positiv definit ist. Sei also $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| > 0$. Dann gilt entweder $\lambda_n \neq 0$ oder $\sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i| > 0$. Im ersten Fall gilt

$$\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\| \geq |\lambda_n| d(b_n, Y) > 0$$

Falls nun $\sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i| > 0$ ist, gilt wieder entweder $\|\lambda_n b_n\| > 0$, sprich $\lambda_n \neq 0$, womit wir im oberen Fall wären, oder $\|\lambda_n b_n\| < \|\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i b_i\|$ Bei diesem Fall rechnen wir

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\| &= \|\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i b_i - (-\lambda_n b_n)\| \\
&\geq \|\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i b_i\| - \|\lambda_n b_n\| \\
&> 0
\end{aligned}$$

Also in jedem Fall $\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\| > 0$, womit wir dann fertig wären. □

3 Das konstruktive Hahn Banach Theorem

In diesem Kapitel konzentrieren wir uns auf die Aussage des Hahn Banach Theorems in der konstruktiven Analysis

3.1 Das approximierte Hahn Banach Theorem

Zuerst wollen wir uns an einem Beispiel klar machen, dass das klassische Hahn Banach Theorem nicht akzeptiert werden kann.

3.1.1 Beispiel

Nehmen wir an, dass das klassiche Hahn Banach Theorem in der konstruktiven Analysis gilt (also, dass Korollar 1.5 gilt). Dann kann man leicht folgern, dass für jedes $0 \neq x \in X$ ein lineares Funktional u existiert, sodass $u(x) = \|x\|$ und $\|u\| = 1$ gilt (indem man Korollar 1.5 auf den Unterraum $< \{x\} >$ und das Funktional $v(\alpha x) = \alpha\|x\|$ anwendet).

Nun wenden wir diese Eigenschaft auf den normierten Raum $\mathbb{R}^2$, versehen mit der Norm $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, und den Punkt $(1, a) \in \mathbb{R}^2$ an, wobei a eine beliebige reelle Zahl ist. Also existiert ein lineares Funktional u mit der Eigenschaft $u(1, a) = \|(1, a)\| = 1+|a|$ und $\|u\| = 1$. Nach der Definition der Norm eines Funktionals, gilt wegen $\|u\| = 1$ auch $u((x, y)) \leq \|(x, y)\|$, woraus $u((0, 1)) \leq 1$ und $u((1, 0)) \leq 1$ folgt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}1 + |a| &= u((1, a)) \\ &= u((1, 0)) + au((0, 1)) \\ &\leq u((1, 0)) + |a|\end{aligned}$$

Also muss $u((1, 0)) = 1$ und $au((0, 1)) = |a|$ gelten. Nun gilt entweder $u((0, 1)) < 1$ oder $u((0, 1)) > -1$. Aus dem ersten Fall können wir schließen, dass $a \leq 0$ gelten muss, da sonst $au((0, 1)) < |a|$. Analog können wir für den zweiten Fall $a \geq 0$ folgern.
Insgesamt haben wir also gezeigt, da a beliebig war:

$$\forall_{a \in \mathbb{R}} \Big(a \leq 0 \lor a \geq 0 \Big)$$

Jetzt nehmen wir uns eine beliebige Binärfolge $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit höchsten einer 1. Dann gilt nach dem obigen Resultat:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\alpha_n 2^{-n} \geq 0 \text{ oder } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\alpha_n 2^{-n} \leq 0$$

Bei dem ersten Resultat folgt dann, dass $\alpha_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Bei dem zweiten Resultat folgt dementsprechend $\alpha_{2n} = 0$. Dies entspricht aber genau LLPO. Also haben wir aus aus dem klassischen Hahn Banach Theorem ein Tabu der konstruktiven Mathematik gefolgert, womit das Theorem in der klassischen Weise nicht akzeptiert werden kann.

Jetzt fragt man sich natürlich, wie dann das Theorem im Konstruktiven aussehen soll. Dafür erwähnen wir nochmal den Zwischenwertsatz, der in Abschnitt 2.1 schon erwähnt wurde. Dieser kann in der konstruktiven Mathematik auch nicht mit den selben Voraussetzungen bewiesen werden. Allerdings kann man den Mittelwertsatz mit entsprechenden Abänderungen beweisen. Fügt man nämlich die Bedingung hinzu, dass f folgenstetig ist und f lokal nicht null ist, dann kann der Zwischenwertsatz auch in der konstruktiven Mathematik bewiesen werden.

So ähnlich ist es mit dem Hahn Banach Theorem. Mit denselben Voraussetzungen wie im klassischem Hahn Banach Theorem können wir nur zeigen, dass sich die Norm um höchstens ein beliebiges $\epsilon > 0$ erhöht. Die Gleichheit von den zwei Normen ist unzulässig in der konstruktiven Analysis, was wir anhand folgendem Beispiel erläutern. Also erhalten wir eine approximierte Version des Hahn Banach Theorems. Fügt man aber noch Bedingungen hinzu, so können wir das vermeiden. Dies wird dann später aufgezeigt. Nun wollen wir zuerst den ersten Schritt für das approximierte konstruktive Hahn Banach Theorem machen. Dafür zeigen wir jetzt erstmal, dass man die Dimension um eins erhöhen kann und sich die Norm nur um ein $\epsilon > 0$ ändert.

3.1.2 Lemma

Sei X ein endlich dimensionaler normierter Raum über $\mathbb{R}$ und Y ein Unterraum und nehmen wir an, dass $X =< \{Y, x_0\} >$ und $d(x_0, Y) > 0$. Sei u ein normierbares lineares Funktional mit $u \neq 0$ auf Y. Dann existiert für alle $\epsilon > 0$ ein normierbares lineares Funktional v auf Y, so dass gilt

$$\forall_{y\in Y}(u(y) = v(y)) \text{ und } \|v\| \leq \|u\| + \epsilon$$

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\|u\| = 1$. Seien $x, x' \in X$, dann gilt wegen Lemma 1.4

$\forall_{y\in Y}(u(y) \leq \|u\|\|y\| = \|y\|)$ und damit folgt

$$\begin{aligned} u(x) + u(x') &= u(x + x') \\ &\leq \|y + y'\| \\ &\leq \|y - x_0\| + \|y' + x_0\| \end{aligned}$$

$\Rightarrow u(y) - \|y - x_0\| \leq \|y' + x_0\| - u(y')$
Definiere nun

$$\varphi(y) = u(y) - (1+\epsilon)\|y - x_0\|$$

Behauptung: Wir können ein $r > 0$ finden, so dass

$$\forall_{\|y\|\geq r}\ (\ \varphi(y) \leq -(1+\epsilon)\|x_0\|)$$

Beweis. Zuerst schauen wir uns ein paar Grenzwerte an für $\|y\| \to \infty$. Es gilt

$$\left|\frac{\|y - x_0\|}{\|y\|} - 1\right| = \left|\frac{\|y - x_0\| - \|y\|}{\|y\|}\right| \leq \frac{\|x_0\|}{\|y\|}$$

Da $\frac{\|x_0\|}{\|y\|} \to 0$ gilt für $\|y\| \to \infty$, gilt $\left|\frac{\|y-x_0\|}{\|y\|} - 1\right| \to 0$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\|y - x_0\| - \|x_0\|}{\|y\|} - 1\right| &= \left|\frac{\|y - x_0\|}{\|y\|} - 1 - \frac{\|x_0\|}{\|y\|}\right| \\ &\leq \left|\frac{\|y - x_0\|}{\|y\|} - 1\right| + \left|\frac{\|x_0\|}{\|y\|}\right| \end{aligned}$$

Da $\left|\frac{\|y-x_0\|}{\|y\|} - 1\right| \to 0$ und $\frac{\|x_0\|}{\|y\|} \to 0$ gilt, können wir folgern, dass $\left|\frac{\|y-x_0\|-\|x_0\|}{\|y\|} - 1\right| \to 0$ also insgesamt $\left|\frac{\|y-x_0\|-\|x_0\|}{\|y\|}\right| \to 1$ gilt .
Jetzt wählen wir $r > 0$ so groß, dass

$$\left|\frac{\|y - x_0\| - \|x_0\|}{\|y\|}\right| > 1 - \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \text{ für } \|y\| \geq r$$

und da allgemein $\|y - x_0\| - \|x_0\| \leq \|y\|$ gilt, erhalten wir

$$\frac{\|y - x_0\| - \|x_0\|}{\|y\|} > 1 - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} (1+\epsilon)\frac{\|y - x_0\| - \|x_0\|}{\|y\|} &> (1+\epsilon)(1 - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}) \\ &= 1 + \epsilon - \epsilon \\ &= 1 \end{aligned}$$

Deswegen folgt dann

$$\begin{aligned} &\|y\| \leq (1+\epsilon)\|y-x_0\| - (1+\epsilon)\|x_0\| \\ \Leftrightarrow\ &\|y\| - (1+\epsilon)\|y-x_0\| \leq -(1+\epsilon)\|x_0\| \end{aligned}$$

Nach diesem Resultat haben wir insgesamt für $\|y\| \geq r$ gezeigt:

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= u(y) - (1+\epsilon)\|y-x_0\| \\ &\leq \|y\| - (1+\epsilon)\|y-x_0\| \\ &\leq -(1+\epsilon)\|x_0\| \end{aligned}$$

□

Definiere nun

$$s = \sup\{\varphi(y) : \|y\| \leq r\}$$

Dies existiert, da $\{\varphi(y) : \|y\| \leq r\}$ eine total beschränkte Menge ist und wegen Lemma 2.3.6
Nun gilt $\varphi(y) \leq \varphi(0)$ für $\|y\| \geq r$ also gilt $s = \sup\{\varphi(y) : y \in Y\}$
Außerdem haben wir für $y \in Y$:

$$\begin{aligned} u(y) - s &\leq u(y) - \varphi(y) \\ &= u(y) - u(y) + (1+\epsilon)\|y-x_0\| \\ &= (1+\epsilon)\|y-x_0\| \end{aligned}$$

Oben haben wir gezeigt, dass für alle $y, y' \in Y$ gilt:
$\varphi(y) = u(y) - \|y-x_0\| \leq \|y'+x_0\| - u(y')$ also

$$\begin{aligned} u(y) + s &\leq u(y) + (1+\epsilon)\|y+x_0\| - u(y) \\ &= (1+\epsilon)\|y+x_0\| \end{aligned}$$

Jetzt definieren wir unser gesuchtes lineares Funktional auf X indem wir für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ setzen:

$$v(y+\alpha x_0) = u(y) + \alpha s$$

was auf allen Vektoren von X definiert ist, da $X =< \{Y, x_0\} >$ gilt. Offensichtlich gilt $\forall_{y\in Y}\ \Big(u(y) = v(y)\Big)$ also setzt v unser u fort. Für $\alpha > 0$ folgt dann wegen den oberen beiden Abschätzungen

$$\begin{aligned} v(y+\alpha x_0) &= u(y) + \alpha s \\ &= \alpha(u(\alpha^{-1}y) + s) \\ &\leq \alpha(1+\epsilon)\|\alpha^{-1}y + x_0\| \\ &= (1+\epsilon)\|y+\alpha x_0\| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v(y - \alpha x_0) &= u(y) - \alpha s \\ &= \alpha(u(\alpha^{-1} y) - s) \\ &\leq \alpha(1+\epsilon)\|\alpha^{-1}y - x_0\| \\ &= (1+\epsilon)\|y - \alpha x_0\| \end{aligned}$$

Deswegen gilt

$$\forall_{x \in X} \Big(v(x) \leq (1+\epsilon)\|x\| \Big)$$

Ersetzen wir nun x durch $-x$, so erhalten wir $|v(x)| \leq (1+\epsilon)\|x\|$ gilt.

Also müssen wir jetzt nur noch zeigen, dass v auch normierbar ist, dann können wir feststellen, dass $\|v\| \leq \|u\| + \epsilon$
Da $u \neq 0$ ist, können wir ein Vektor finden, sodass $u(a) = \delta \neq 0$ ist. Setze $y_0 = \frac{-s}{\delta} a$, dann gilt $u(y_0) = -s$. Sei nun $y + \alpha x_0$ ein beliebiger Vektor im Kern von v. Es gilt

$$y + \alpha x_0 = \alpha(x_0 + y_0) + (y - \alpha y_0)$$

Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} u(y - \alpha y_0) &= u(x) - \alpha(-s) \\ &= u(x) + \alpha s \\ &= v(y + \alpha x_0) = 0 \end{aligned}$$

Also haben wir gezeigt, dass sich der Kern von v durch $\{y_0 + x_0\} \cup ker(u)$ aufspannen lässt.
Da nun u normierbar ist, ist auch der Kern von u lokalisiert nach Proposition 2.3.4. Dann folgt mit Lemma 2.3.7 und Proposition 2.3.8, dass der Kern von u endlich dimensional ist, denn Y ist endlich-dimensional und damit lokal total beschränkt, und $Ker u$ ist lokalisierter Unterraum. Nun haben wir

$$\begin{aligned} 0 &< d(x_0, Y) \\ &= d(x_0 + y_0, Y) \\ &\leq d(x_0 + y_0, ker\ u) \end{aligned}$$

also ist nach Lemma 2.3.9 auch $ker(v)$ endlich dimensional und damit lokalisiert. Also ist $ker(v)$ nach Proposition 2.3.4 auch normierbar, womit der Beweis abgeschlossen ist $\square$

Nun können wir die approximierte Version des Hahn Banach Theorem beweisen, indem wir Lemma 2.11 iterieren.

3.1.3 Das approximierte konstruktive Hahn Banach Theorem

Sei $u \neq 0$ ein beschränktes Funktional auf einer Teilmenge Y eines separablen normierten Vektorraums X über $\mathbb{R}$, so dass der Kern von u lokalisierbar ist. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein normierbares Funktional v auf X, sodass v eine Fortsetzung von u ist und $\|v\| \leq \|u\| + \epsilon$ gilt.

Beweis. Sei K der Kern von u. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $ker(u) = \{0\}$, sonst wenden wir einfach das Theorem auf den Quotientenraum X/K an. Außerdem sagen wir, dass Y eindimensional ist, da sich alle anderen Fälle aus diesem hier ergeben. Da X separabel ist, können wir eine dichte Teilmenge A finden. Sei nun $(x_n)_{n\geq 1}$ die Folge, die jedes Element aus A unendlich oft enthält, mit $x_1 \in Y$. Nun konstruieren wir eine Folge $(y_n)_{n\geq 1}$ mit $y_1 = x_1$ so, dass für jedes n, wenn $Y_n =< \{y_1, ..., y_n\} >$, entweder

$$y_{n+1} = 0 \text{ falls } d(x_{n+1}, Y_n) < \frac{1}{n}$$
$$\text{oder } y_{n+1} = x_{n+1} \text{ falls } d(x_{n+1}, Y_n) > 0$$

Bemerke, falls für $a \in A$ auch $d(a, Y_i) > 0$ gilt, dann gilt $d(a, Y_i) > \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, also kommen wir irgendwann nicht mehr in den oberen Fall. Da wir unendlich viele a in der Folge haben, landen wir somit irgendwann im unteren Fall, falls a bis dahin noch nicht im Spann des jeweiligen Unterraums liegt. Also gehen wir somit sicher, dass A dicht in $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ liegt. Also liegt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ dicht in X.
Außerdem ist Y_n endlich dimensional, und wir können auf die Räume Y_n und Y_{n+1} Lemma 2.4 anwenden, welches besagt, dass wir u auf den nächsten Raum fortsetzen können und sich dabei die Norm nur um $\epsilon 2^{-n}$ ändert. Führen wir das so fort, so erhalten wir schließlich ein lineares Funktional v mit

$$\begin{aligned} \|v\| &\leq \|u\| + \sum_{n\in\mathbb{N}} \epsilon 2^{-n} \\ &= \|u\| + \epsilon \end{aligned}$$

was unserem gewünschtem Resultat entspricht. □

3.2 Das Hahn Banach Theorem

Nun haben wir das approximierte Hahn Banach Theorem erfolgreich bewiesen. Allerdings sind wir damit noch nicht zufrieden, da wir nur eine approximierte Version des Theorems haben. Also wollen wir jetzt versuchen, unsere Voraussetzungen so anzupassen, dass wir tatsächlich in der Lage sind, das Theorem in der Form von Korollar 1.5 beweisen zu können. Unser zweites Ziel ist es außerdem die Voraussetzungen nicht zu streng zu machen, also wir wollen nicht, dass nur sehr wenige Räume diese erfüllen, sonder durch die Voraussetzungen keine großen Einschränkungen passieren. Zuerst definieren wir uns die erste wichtige Bedingung, die keine großen Einschränkungen enthält.

3.2.1 Definition: Gâteaux differenzierbar

Sei X ein normierter Raum. Die Norm von X heißt Gâteaux differenzierbar bei $x \in X$ genau dann, wenn für jedes $y \in X$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|x + hy\| - \|x\|}{h}$$

existiert. Wir nennen die Norm von X Gâteaux differenzierbar, wenn sie an jedem Punkt $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ Gâteaux differenzierbar ist.

Schauen wir uns ein paar Beispiele an.

3.2.2 Beispiel: $X = \mathbb{R}^n$

Betrachten wir z.B. die euklidische Norm $\| \cdot \|_2$ auf $\mathbb{K}^n$. Diese ist für alle $x \neq 0$ Gâteaux differenzierbar, da die Funktion

$$x \to \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}$$

differenzierbar ist mit Gradient $\frac{x}{\|x\|_2}$. Daraus können wir schon schließen, dass jede Norm auf $\mathbb{K}^n$ Gâteaux differenzierbar ist, da jede Norm auf $\mathbb{K}^n$ zu $\| \cdot \|_2$ äquivalent ist.

3.2.3: Hilbertraum

Wir können außerdem noch zeigen, dass jeder Hilbertraum X bei $\neq x \in X$ Gâteaux differenzierbar ist: Dafür rechnen wir für beliebiges $y \in X$:

$$\begin{aligned}
(\|x + hy\| - \|x\|)(\|x + hy\| + \|x\|) &= \|x + hy\|^2 - \|x\|^2 \\
&= < x + hy, x + hy > - < x, x > \\
&= < hy, x > + < x, hy > + < hy, hy >
\end{aligned}$$

also gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\|x + hy\| - \|x\|}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{< hy, x > + < x, hy > + < hy, hy >}{h(\|x + hy\| + \|x\|)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{< y, x > + < x, y > + < y, hy >}{\|x + hy\| + \|x\|} \\
&= \frac{< y, x > + < x, y >}{2\|x\|}
\end{aligned}$$

also existiert der Limes und somit ist die Norm bei jedem Punkt $x \in X$ Gâteaux differenzierbar.

Das folgende Lemma benötigen wir später noch.

3.2.5 Lemma Sei u eine konvexe Funktion von einem Raum X in $\mathbb{R}$ mit $u(x) = -u(-x)$. Dann ist u ein lineares Funktional.

Beweis. Es gilt $u(0) = -u(-0) = -u(0)$ also gilt auch $u(0) = 0$ Seien zuerst $0 \leq \lambda \leq 1$ und $x \in X$, dann gilt wegen Konvexität von u

$$\begin{aligned} u(\lambda x) &= u(\lambda x + (1-\lambda)0) \\ &\leq \lambda u(x) + (1-\lambda)u(0) \\ &= \lambda u(x) \end{aligned}$$

Ersetzen wir x durch $-x$, so erhalten wir $u(-\lambda x) \leq \lambda u(-x)$, also folgt nach Voraussetzung $-u(\lambda x) \leq -\lambda u(x)$ und deshalb auch $\lambda u(x) \leq u(\lambda x)$. Somit haben wir die Gleichheit gezeigt. Für beliebiges $\lambda > 0$ gilt $\frac{\lambda}{1+\lambda} < 1$ und somit gilt nach dem vorigen:

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} u(x) = u(\frac{\lambda}{1+\lambda} x) = \frac{1}{1+\lambda} u(\lambda x)$$

Multiplizieren mit $1+\lambda$ ergibt $\lambda u(x) = u(\lambda x)$. Zuletzt berechnen wir für $\lambda < 0$

$$\begin{aligned} u(\lambda x) &= u((-\lambda)(-x)) \\ &= -\lambda u(-x) \\ &= \lambda u(x) \end{aligned}$$

Damit gilt $\forall_{\lambda \in \mathbb{R}}(u(\lambda x) = \lambda u(x))$ Für die Additivität nehmen wir $x, y \in X$, dann gilt wegen Konvexität von u

$$u(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{u(x)}{2} + \frac{u(y)}{2}$$

Verdoppeln wir beide Seiten erhalten wir $u(x+y) \leq u(x) + u(y)$ Ersetzen wir wieder x, y durch $-x, -y$ und gehen vor wie im Beweis für $0 \leq \lambda \leq 1$, so erhalten wir letzten Endes $u(x+y) = u(x) + u(y)$. Also insgesamt u linear □

Das nächste Lemma in Kombination mit 2.17 impliziert uns dann schon das Resultat des Hahn Banach Theorem

3.2.6 Lemma
Sei X normierter Raum und $0 \neq x \in X$ und nehme an, dass die Norm von X bei x Gateaux differenzierbar ist, dann existiert ein eindeutiges lineares normierbares Funktional u mit $\|u\| = 1$ und $u(x) = \|x\|$.

Beweis. Definiere

$$u(y) := \lim_{h \to 0} \frac{\|x + hy\| - \|x\|}{h}$$

Dies ist wohldefiniert, da die Norm bei x Gâteuax differenzierbar ist. Dann ist u konvex, denn für $y_1, y_2 \in X$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned}
u(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) &= \lim_{h\to 0} \frac{\|x + h\lambda y_1 + h(1-\lambda)y_2\| - \|x\|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\|x + h\lambda y_1 + h(1-\lambda)y_2 + \lambda x - \lambda x\| - \|x\|}{h} \\
&\leq \lim_{h\to 0} \frac{\|x - \lambda x + h(1-\lambda)y_2\| + \|\lambda x + h\lambda y_1\| - \lambda\|x\| - (1-\lambda)\|x\|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1-\lambda)\|x + hy_2\| + \lambda\|x + hy_1\| - \lambda\|x\| - (1-\lambda)\|x\|}{h} \\
&= \lambda u(y_1) + (1-\lambda)u(y_2)
\end{aligned}$$

Da auch $u(y) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\|x+hy\|-\|x\|}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\|x+-hy\|-\|x\|}{-h} = -u(-y)$gilt, können wir den letzten Satz anwenden und erhalten, dass u linear ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
|u(y)| &= \lim_{h\to 0} \frac{\|x + hy\| - \|x\|}{h} \\
&\leq \lim_{h\to 0} \frac{\|x\| + h\|y\| - \|x\|}{h} \\
&= \|y\|
\end{aligned}$$

Und offensichtlich gilt $u(x) = \|x\|$ und wir erhalten, dass $\|u\| = 1$ gilt. Bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei v ein Funktional mit denselben Eigenschaften wie u. Sei $y \in X$, dann gilt für jedes $h > 0$

$$\begin{aligned}
-\frac{\|x - hy\| - \|x\|}{h} &\leq \frac{v(x - hy) - v(x)}{-h} \\
&= \frac{v(-hy)}{-h} \\
&= v(y)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
v(y) &= \frac{v(x + hy) - v(x)}{h} \\
&\leq \frac{\|x + hy\| - \|x\|}{h}
\end{aligned}$$

Für $h \to 0$ können wir also feststellen, dass $u(y) \leq v(y) \leq u(y)$gilt, also haben wir gezeigt, dass $u = v$ gilt und damit die Eindeutigkeit □

Jetzt definieren wir unsere zweite nötige Bedingung für das Hahn Banach Theorem.

3.2.7 Definition: Gleichmäßige Konvexität

Ein normierter Raum X heißt gleichmäßig konvex genau dann, wenn

$$\forall_{\epsilon>0} \left(\exists_{1>\delta>0} \left(\forall_{\|x\|=\|y\|=1} \left(\|x - y\| \geq \epsilon \Rightarrow \|\tfrac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta \right) \right) \right)$$

3.2.8 Beispiel: Hilbertraum

Nehmen wir an, dass X ein Hilbertraum ist. Dann gilt die sogenannte Parallelogrammgleichung für alle $x, y \in X$:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig und wähle $\delta = \frac{1}{4}\epsilon^2$ und $\tilde{\delta} = 1 - \sqrt{1-\delta}$, dann gilt für alle $x, y \in X$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und $\|x-y\| > \epsilon$ nach der Parallelogrammgleichung

$$\begin{aligned}\|(x+y)/2\|^2 &= \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 \\ &\leq 1 - \frac{1}{4}\epsilon^2 \\ &= 1 - \delta\end{aligned}$$

Also gilt $\|(x+y)/2\| = \sqrt{1-\delta} = 1 - \tilde{\delta}$. Daraus folgt dann die gleichmäßige Konvexität.

3.2.9 Beispiel $X = l^p$ mit der Norm $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$

Um die gleichmäßige Konvexität zu zeigen benötigen wir die Clarkson Ungleichung. Diese besagt für $p \geq 2$ und $x, y \in l^2$:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^p \leq \frac{1}{2}(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

Falls $1 < p < 2$, dann gilt für q mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^q + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^q \leq (\frac{1}{2}\|x\|^p + \|y\|^p)^{q-1}$$

Der Beweis dieser Ungleichung benötigt nur Abschätzungen, weshalb diese Ungleichung konstruktiv akzeptiert werden kann. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $1 > \epsilon > 0$ und für den Fall $p \geq 2$ wähle $\delta = 1 - \sqrt[p]{1 - \frac{\epsilon^p}{2^p}}$ (dann gilt $\delta \in (0,1)$, da $\epsilon < 1$) und seien $\|x\| = \|y\| = 1$ mit $\|x-y\| \geq \epsilon$, dann gilt nach Clarkson:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p &\leq \frac{1}{2}(\|x\|^p + \|y\|^p) - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^p \\ &\leq 1 - \frac{\epsilon^p}{2^p}\end{aligned}$$

Also folgt schon $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$,womit der Fall fertig ist.

Für den Fall $1 < p \leq 2$ wähle dieses mal $\delta = 1 - \sqrt[p]{1 - \frac{\epsilon^p}{2^p}}$, dann folgt für $\|x\| = \|y\| = 1$ nach Clarkson

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^q &\leq (\frac{1}{2}\|x\|^p + \|y\|^p)^{q-1} - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^q \\ &\leq 1 - \frac{\epsilon^q}{2^q}\end{aligned}$$

Also folgt schon $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta$ und dieser Fall ist somit auch fertig.

Schauen wir uns den Fall an, dass $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm. Dann ist X ein Hilbertraum und daher ist dieser Raum schon nach dem vorherigen Beispiel gleichmäßig konvex.

3.2.10 Proposition

Sei $u \neq 0$ ein lineares Funktional auf einem gleichmäßigen konvexen Banachraum X. Dann existiert ein eindeutiger Vektor $x \in X$ mit $u(x) = \|u\|$ und $\|x\| = 1$

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus Einheitsvektoren und sei $\epsilon > 0$. Da X gleichmäßig konvex ist, gibt uns die Definition ein $\delta > 0$. Nun wissen wir, dass es eine positive Konstante N gibt, so dass $\forall_{n>N}((1-\frac{\delta}{2})\|u\| < u(x_n))$. Sei $m, n > N$, dann gilt $|u(x_n + x_n)| = |u(x_n) + u(x_m)| = u(x_n) + u(x_m)$, da nach Wahl $u(x_n) > 0$ für $n > N$, und außerdem $\|u\| - u(x_n) < \frac{\delta}{2}$ und wir erhalten somit

$$
\begin{aligned}
\|u\| \left\|\frac{(x_n + x_m)}{2}\right\| &\geq \frac{|u(x_m + x_n)|}{2} \\
&= \frac{u(x_m) + u(x_n)}{2} \\
&= u(x_m) - \frac{1}{2}(u(x_m) - u(x_n)) \\
&\geq u(x_m) - \frac{1}{2}|u(x_m) - u(x_n)| \\
&\geq u(x_m) - (\frac{1}{2}|u(x_m) - \|u\|| + |\|u\| - u(x_n)|) \\
&= u(x_m) - \frac{1}{2}(\|u\| - u(x_m)) - (\|u\| - u(x_n)) \\
&> (1-\frac{\delta}{2})\|u\| - \frac{\delta}{4}\|u\| - \frac{\delta}{4}\|u\| \\
&= \|u\|(1-\delta)
\end{aligned}
$$

Also gilt $\|\frac{x_n+x_m}{2}\| > 1-\delta$ woraus folgt, dass $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ gilt. Damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und konvergiert gegen einen Vektor $x \in X$, da X ein Banachraum ist. Wegen der Stetigkeit der Norm und u erhalten wir $\|x\| = 1$ und $u(x) = \|u\|$.

Eindeutigkeit: Sei $y \in X$ mit $\|y\| = \|x\| = u(x)$. Definiere die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $y_{2n} = x$ und $y_{2n+1} = y$, dann ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Einheitsvektoren, sodass $u(y_n) \to \|u\|$ für $n \to \infty$. Also muss $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Einheitsvektor konvergieren, und erhalten somit $x = y$ □

3.2.11 Hahn Banach Theorem

Sei X ein gleichmäßiger konvexer Banachraum mit Gateaux differenzierbarer

Norm und Y ein Unterraum. Sei $u \neq 0$ ein lineares Funktional auf Y. Dann existiert ein ein eindeutiges lineares Funktional v auf X mit $\forall_{y \in Y} \Big(v(y) = u(y) \Big)$ und $\|u\| = \|v\|$

Beweis. Wir können $\|u\| = 1$ annehmen. Nun können wir, da u stetig ist, es auf dem Rand von Y so fortsetzen, dass $\|u\| = 1$ immer noch gilt. Nun ist $\overline{Y}$ ein abgeschlossener Raum und somit auch ein Banachraum, der gleichmäßig konvex ist, also liefert uns die vorherige Proposition ein $x \in Y$, sodass $u(x) = \|u\| = 1$. Nun ist die Norm Gateaux differenzierbar, also gibt es nach Lemma 3.6 ein lineares Funktional v mit $v(x) = \|x\|$ und $\|v\| = 1$. Also sind $u, v \mid_Y$ zwei Funktionale mit Norm 1 und $u(x) = v(x) = 1$. Da aber Lemma 3.6 sagt, dass das Funktional eindeutig ist, muss $u = v \mid_Y$ gelten. $\square$

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit eigenständig und ohne fremde Hilfe angefertigt habe. Ich versichere, dass ich keine anderen als die angegebenen Quellen verwendet habe, und dass die eingereichte Arbeit weder vollständig noch in wesentlichen Teilen Gegenstand eines anderen Prüfungsverfahren gewesen ist.

____________________ ____________________

Ort, Datum Unterschrift