Mathematik für Naturwissenschaftler I

Priv.-Doz. Dr. Iosif Petrakis

Ludwig-Maximilians-Universität München
Wintersemester 20/21

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Zahlsysteme

In diesem Kapitel werden wir einige grundlegende Eigenschaften der folgenden Zahlensysteme betrachten: der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, und der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Dazu werden wir eine kürze Einführung in die grundlegenden Mengenbegriffe und in den Begriff der Funktion zwischen zwei Mengen machen.

1.1. Mengen

Die Menge ist eines der wichtigsten und grundlegenden Konzepte der Mathematik. Mit ihrer Betrachtung beschäftigt sich die Mengenlehre.

DEFINITION 1.1.1. Eine *Menge* X ist eine Zusammenfassung von einzelnen mathematischen Objekten. Ein mathematisches Objekt x in X heißt ein *Element* von X, und wir schreiben

$$x \in X.$$

Wenn y kein Element von X ist, dann schreiben wir

$$y \notin X :\Leftrightarrow \text{ nicht } (y \in X).$$

Die *leere* Menge $\emptyset$ hat kein Element. Die Mengen X und Y heißen *gleich*, und wir schreiben $X = Y$, genau dann wenn X und Y die gleichen Elemente enthalten, d.h.

$$X = Y :\Leftrightarrow \forall_x \big(x \in X \Leftrightarrow x \in Y\big).$$

Eine Menge A ist eine *Teilmenge* von X, und wir schreiben $A \subseteq X$, genau dann wenn jedes Element von A ein Element von X ist, d.h.

$$A \subseteq X :\Leftrightarrow \forall_a \big(a \in A \Rightarrow a \in X\big).$$

Wenn $A \subseteq X$ und $x \in X$, sodass $x \notin A$, dann ist A eine *echte* Teilmenge von X, und wir schreiben $A \subsetneq X$. Die Menge $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen von X heißt *Potenzmenge* von X.

Sehr oft benutzen wir die Symbole $\{,\}$ um eine Menge zu bezeichnen.

BEISPIEL 1.1.2. Die *Menge aller natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ ist die Menge

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Die *Menge aller ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ ist die Menge

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Offensichtlich gilt

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}.$$

Sei X eine Menge. Wir können eine Teilmenge X_P von X durch eine *Eigenschaft* $P(x)$ auf X definieren, indem wir alle Elemente von X zusammenfassen, für die gilt $P(x)$ ist wahr. Wir schreiben

$$X_P = \{x \in X \mid P(x)\}.$$

BEISPIEL 1.1.3. Die Menge `Even` aller *geraden* Zahlen ist definiert durch

$$\texttt{Even} = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}, \quad P(n) :\Leftrightarrow \exists_{m \in \mathbb{N}}\big(n = 2m\big),$$

wobei

$$\exists_{m \in \mathbb{N}}\big(n = 2m\big) :\Leftrightarrow \exists_{m}\big(m \in \mathbb{N} \ \& \ n = 2m\big).$$

Es gilt $\texttt{Even} \subsetneq \mathbb{N}$. Die Menge `Odd` aller *ungeraden* Zahlen ist definiert durch

$$\texttt{Odd} = \{n \in \mathbb{N} \mid Q(n)\}, \quad Q(n) :\Leftrightarrow \exists_{m \in \mathbb{N}}\big(n = 2m + 1\big).$$

Die Mengen X, Y sind gleich genau dann wenn X eine Teilmenge von Y ist und Y eine Teilmenge von X ist, d.h.

$$X = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y \ \& \ Y \subseteq X.$$

DEFINITION 1.1.4. Seien X, Y Mengen. Die *Schnittmenge* $X \cap Y$, oder der *Schnitt* von X und Y ist die Menge aller Objekte die gleichzeitig Elemente von X *und* Y sind, d.h.

$$X \cap Y = \{z \mid z \in X \ \& \ z \in Y\}.$$

Die *Vereinigungsmenge*, oder die *Vereinigung* $X \cup Y$ von X und Y ist die Menge aller Objekte die Elemente von X *oder* von Y sind, d.h.

$$X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ oder } z \in Y\}.$$

Wenn $A \subseteq X$, ist das *Komplement* A' von A in X die Menge aller Elemente von X die nicht in A sind, d.h.

$$A' = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

Offensichtlich gelten

$$\mathtt{Odd} \cap \mathtt{Even} = \emptyset,$$

$$\mathtt{Odd} \cup \mathtt{Even} = \mathbb{N},$$

$$\mathtt{Odd}' = \mathtt{Even},$$

$$\mathtt{Even}' = \mathtt{Odd}.$$

SATZ 1.1.5. *Sei X eine Menge und seien A, B, C Teilmengen von X.*
(i) $\emptyset \subseteq X$ *und* $X \subseteq X$.
(ii) $A \cap A = A$ *und* $A \cup A = A$.
(iii) $A \cap B = B \cap A$ *und* $A \cup B = B \cup A$.
(iv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *und* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
(v) $(A \cap B) \cup A = A$ *und* $(A \cup B) \cap A = A$.
(vi) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ *und* $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
(vii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *und* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

SATZ 1.1.6. *Sei X eine Menge und A, B Teilmengen von X.*
(i) $\emptyset' = X$ *und* $X' = \emptyset$.
(ii) $A \cap A' = \emptyset$ *und* $A \cup A' = X$.
(iii) $\big(A'\big)' = A$.
(iv) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.
(v) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
(vi) $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$.

DEFINITION 1.1.7. Seien X, Y Mengen. Das *kartesische Produkt*, oder das *Produkt* $X \times Y$ von X, Y ist die Menge aller Paaren (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$, d.h.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \ \& \ y \in Y\},$$

wobei

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \ \& \ y = y',$$

für alle $(x, y), (x', y') \in X \times Y$.

1.2. Funktionen

DEFINITION 1.2.1. Seien X, Y Mengen. Eine *Funktion*, oder eine *Abbildung*, $f : X \to Y$ von X nach Y ist eine Regel die jedem Element (input) $x \in X$ ein einziges Element (output) $f(x) \in Y$ zuordnet. Das Element $f(x)$ heißt der *Wert* von f auf x. Um zu bezeichnen, dass durch f x auf $f(x)$ abbildet wird, schreiben wir

$$x \mapsto f(x).$$

Um zu bezeichnen, dass jedem Element von X ein eindeutiges Element von Y zugeordnet wird, schreiben wir

$$x = x' \Rightarrow f(x) = f(x'),$$

für alle $x, x' \in X$. Die Menge X heißt *Definitionsmenge* von f, und die Menge Y *Zielmenge* von f. Die *Wertemenge* $\mathtt{Im}(f)$ von f ist die Menge aller Werte von f, d.h.

$$\mathtt{Im}(f) = \{y \in Y \mid \exists_{x \in X} \big(y = f(x)\big)\}.$$

Wenn $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$, dann sind f, g *gleich*, genau dann wenn f und g gleich sind für jedes $x \in X$, d.h.

$$f = g \Leftrightarrow \forall_{x \in X} \big(f(x) = g(x)\big).$$

Offensichtlich gilt

$$\mathtt{Im}(f) \subseteq Y.$$

BEISPIEL 1.2.2. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$n \mapsto 2n; \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Nach Definition gelten $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, and $f(50) = 100$. Es gilt $\mathtt{Im}(f) = \mathtt{Even}$.

DEFINITION 1.2.3. Eine Funktion $f : X \to Y$ ist eine *Injektion*, oder *injektiv*, wenn für alle $x, x' \in X$ gilt

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Eine Funktion $f \colon X \to Y$ ist eine *Surjektion*, oder *surjektiv*, wenn $\mathtt{Im}(f) = Y$. Eine Funktion f ist eine *Bijektion*, oder *bijektiv*, wenn f eine Injektion und eine Surjektion ist.

Eine Funktion $f \colon X \to Y$ ist injektiv, genau dann wenn für alle $x, x' \in X$ gilt

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'),$$

d.h. wenn f ungleichen inputs ungleiche outputs zuordnet.

BEISPIEL 1.2.4. Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch $n \mapsto 2n$; $n \in \mathbb{N}$, ist injektiv, weil $2n = 2m \Rightarrow n = m$, fúr alle $n, m \in \mathbb{N}$, aber sie ist nicht surjektiv, da $\mathtt{Im}(f) = \mathtt{Even} \subsetneq \mathbb{N}$.

DEFINITION 1.2.5. Sei X eine Menge. Die *identische Abbildung* $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist definiert durch die Regel

$$x \mapsto x; \qquad x \in X.$$

Offensichtlich ist id_X eine Bijektion.

BEISPIEL 1.2.6. Sei $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$g(z) := \begin{cases} z & , z \geq 0 \\ -z & , z < 0. \end{cases}$$

Es gilt g ist surjektiv, weil $g(n) = n$, für alle $n \in \mathbb{N}$, aber g ist nicht injektiv, da z.B. $g(-1) = g(1) = 1$.

DEFINITION 1.2.7. Seien X, Y Mengen, und sei $y_0 \in Y$. Die Funktion $\widehat{y_0} : X \to Y$, definiert durch

$$x \mapsto y_0; \qquad x \in X,$$

ist die *konstante Funktion* von X nach Y mit dem konstanten Wert y_0.

DEFINITION 1.2.8. Seien X, Y, Z Mengen, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$. Die *Komposition* $g \circ f : X \to Z$ von f und g ist definiert durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)); \qquad x \in X$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z. \end{tikzcd}$$

Weil g und f gleichen inputs gleiche outputs zuordnen, ordnet auch die Komposition $g \circ f$ gleichen inputs gleiche outputs zu, d.h.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(w)) = (g \circ f)(w),$$

wobei $x, w \in X$ mit $x = w$.

BEISPIEL 1.2.9. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(n) = n + 1$, für jedes $n \in \mathbb{N}$, und sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $g(n) = n^2$, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gelten $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, und

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = (n + 1)^2,$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Satz 1.2.10. *Seien X, Y, Z, W Mengen, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, und $h : Z \to W$. Es gelten:*

(i) $f \circ \mathrm{id}_X = f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & X \arrow[r, "f"] & Y. \end{tikzcd}$$

(ii) $\mathrm{id}_Y \circ f = f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & Y \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"] & Y. \end{tikzcd}$$

(iii) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] \arrow[rrr, bend left, "(h \circ g) \circ f"] \arrow[rrr, bend right, "h \circ (g \circ f)"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h \circ g"] & Z \arrow[r, "h"] & W. \end{tikzcd}$$

Beweis. (i) Nach Definition der Gleichheit von Funktionen, müssen wir zeigen, dass

$$\forall_{x \in X} \big((f \circ \mathrm{id}_X)(x) = f(x) \big).$$

Wenn $x \in X$, dann gilt

$$(f \circ \mathrm{id}_X)(x) = f(\mathrm{id}_X(x)) = f(x).$$

Weil x ein beliebiges Element von X ist, folgt $f \circ \mathrm{id}_X = f$.
(ii) und (iii) Aufgabe. $\square$

1.3. Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion (IND) ist ein wichtiges Prinzip der natürlichen Zahlen. Das Prinzip IND ist die häufigste Beweismethode für eine Allaussage (oder Universalaussage)

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \big(\phi(n) \big),$$

d.h. “für alle natürlichen Zahlen n die Eigenschaft $\phi(n)$ ist wahr”.

Vollständige Induktion IND: Sei $\phi(n)$ eine mathematische Formel auf $\mathbb{N}$, sodass folgendes gilt:

(i) $\phi(0)$ ist wahr (Induktionsanfang).

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$, aus der Aussage (der Induktionsannahme) $\phi(n)$ folgt stets die Aussage $\phi(n+1)$, d.h.

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\big(\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1)\big).$$

Dann ist die Aussageform $\phi(n)$ allgemeingültig, d.h. $\phi(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir können das Prinzip IND wie folgt schreiben:

$$\text{(IND)} \qquad \big[\phi(0) \;\&\; \forall_{n\in\mathbb{N}}\big(\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1)\big)\big] \Rightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}}\big(\phi(n)\big).$$

Beispiel 1.3.1. Wir beweisen die folgende Allaussage

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\Bigg((1+2020)^n \geq 1 + n \cdot 2020\Bigg)$$

mithilfe des Prinzips IND.

Beweis. Sei $\phi(n)$ die folgende Formel auf $\mathbb{N}$:

$$\phi(n) :\Leftrightarrow (1+2020)^n \geq 1 + n \cdot 2020.$$

Schritt 1: Wir zeigen, dass $\phi(0)$ wahr ist:

$$\phi(0) :\Leftrightarrow (1+2020)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0 \cdot 2020.$$

Schritt 2: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen die Implikation:

$$\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1) \qquad \text{d.h.}$$

$$\Big[(1+2020)^n \geq 1 + n \cdot 2020\Big] \Rightarrow \Big[(1+2020)^{n+1} \geq 1 + (n+1)2020\Big].$$

Angenommen

$$(1+2020)^n \geq 1 + n \cdot 2020,$$

zeigen wir die Ungleichung

$$(1+2020)^{n+1} \geq 1 + (n+1)2020 = 1 + n \cdot 2020 + 2020$$

wie folgt:

$$\begin{aligned}(1+2020)^{n+1} &= (1+2020)^n(1+2020)\\ &\geq (1+n\cdot 2020)(1+2020)\\ &= 1 + n\cdot 2020 + 2020 + n \cdot 2020^2\end{aligned}$$

$$\geq 1 + n \cdot 2020 + 2020$$
$$= 1 + (n+1)2020. \qquad \square$$

Sei $\mathbb{N}^+$ die Menge der natürlichen Zahlen die ungleich 0 sind d.h.

$$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Das Prinzip IND ist äquivalent zu dem folgenden Prinzip IND^+.

Vollständige Induktion IND^+: Sei $\phi(n)$ eine mathematische Formel auf $\mathbb{N}^+$, sodass folgendes gilt:
(*i*) $\phi(1)$ ist wahr (Induktionsanfang).
(*ii*) Für jedes $n \in \mathbb{N}^+$, aus der Aussage (der Induktionsannahme) $\phi(n)$ folgt stets die Aussage $\phi(n+1)$, d.h.

$$\forall_{n \in \mathbb{N}^+} \big(\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1)\big).$$

Dann ist die Aussageform $\phi(n)$ allgemeingültig, d.h. $\phi(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}^+$.
Wir können das Prinzip IND^+ wie folgt schreiben:

$$(\text{IND}^+) \qquad \big[\phi(1) \ \& \ \forall_{n \in \mathbb{N}^+}\big(\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1)\big)\big] \Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}^+}\big(\phi(n)\big).$$

Beispiel 1.3.2. Wir beweisen die folgende Allaussage

$$\forall_{n \in \mathbb{N}^+}\left(1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

mithilfe des Prinzips IND^+.

Beweis. Sei $\phi(n)$ die folgende Formel auf $\mathbb{N}^+$:

$$\phi(n) :\Leftrightarrow 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Schritt 1: Wir zeigen, dass $\phi(1)$ wahr ist:

$$\phi(1) :\Leftrightarrow 1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Schritt 2: Sei $n \in \mathbb{N}^+$. Wir zeigen die Implikation:

$$\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1), \qquad \text{d.h.}$$

$$\left[1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}\right] \Rightarrow \left[1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right].$$

Angenommen

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

zeigen wir die Gleichheit

$$1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

wie folgt:

$$\begin{aligned}
1+2+\ldots+n+(n+1) &= \big[1+2+\ldots+n\big]+(n+1)\\
&= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\
&= \frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$ □

Definition 1.3.3. Seien $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Summe

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1,$$

und für $n > 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) + a_n\\
&= \big(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}\big) + a_n\\
&= a_1 + \ldots + a_n.
\end{aligned}$$

Zum Beispiel, wenn $a_1 = a_2 = \ldots = a_5 = 2$, dann

$$\sum_{k=1}^{5} 2 = 2+2+2+2+2 = 10.$$

Gleichfalls

$$\sum_{k=1}^{n} m = nm,$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} n = n^2.$$

Deshalb schreiben wir die Gleichheit

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

wie folgt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beispiel 1.3.4. Wir beweisen die folgende Allaussage

$$\forall_{n \in \mathbb{N}^+} \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

mithilfe des Prinzips IND^+.

Beweis. Sei $\phi(n)$ die folgende Formel auf $\mathbb{N}^+$:

$$\phi(n) :\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1}{6}).$$

Schritt 1: Wir zeigen, dass $\phi(1)$ wahr ist:

$$\phi(1) :\Leftrightarrow 1^2 = 1 = \frac{6}{6} = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}.$$

Schritt 2: Sei $n \in \mathbb{N}^+$. Wir zeigen die Implikation:

$$\phi(n) \Rightarrow \phi(n+1) \qquad \text{d.h.}$$

$$\left[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1}{6} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} \right].$$

Angenommen

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

zeigen wir die Gleichheit

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

wie folgt:

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 &= \left[1^2+2^2+\ldots+n^2\right]+(n+1)^2\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{6(n+1)(n+1)}{6}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)(n+1)}{6}\\
&= \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{2}\\
&= \frac{(n+1)\left[2n^2+n+6n+6\right]}{2}\\
&= \frac{(n+1)\left[2n^2+7n+6)\right]}{2}\\
&= \frac{(n+1)\left[2n^2+4n+3n+6)\right]}{2}\\
&= \frac{(n+1)\left[2n(n+2)+3(n+2)\right]}{2}\\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \qquad \square
\end{aligned}$$

SATZ 1.3.5. *Sei $f:\mathbb{N}^+\to\mathbb{N}^+$ mit $a=f(1)$. Angenommen*

$$f(n+m)=f(n)f(m),$$

für jede $n,m\in\mathbb{N}^+$. Dann gilt

$$\forall_{n\in\mathbb{N}^+}\big(f(n)=a^n\big).$$

BEWEIS. Wir verwenden das Induktionsprinzip IND^+ für die Formel

$$\phi(n) :\Leftrightarrow f(n)=a^n.$$

Schritt 1: $\phi(1) :\Leftrightarrow f(1)=a^1=a$.
Schritt 2: Sei $n\in\mathbb{N}^+$. Wir zeigen die Implikation

$$\phi(n)\Rightarrow\phi(n+1),$$

d.h.

$$\left[f(n)=a^n\right]\Rightarrow\left[f(n+1)=a^{n+1}\right]$$

wie folgt:

$$f(n+1)=f(n)f(1)=a^nf(1)=a^na=a^{n+1}. \qquad \square$$

LEMMA 1.3.6. *Seien $k, l \in \mathbb{N}$. Es gelten:*
(i) $k \in \texttt{Even} \Rightarrow k^2 \in \texttt{Even}$.
(ii) $k \in \texttt{Odd} \Rightarrow k^2 \in \texttt{Odd}$.
(iii) $k^2 \in \texttt{Even} \Rightarrow k \in \texttt{Even}$.
(iv) $k^2 \in \texttt{Odd} \Rightarrow k \in \texttt{Odd}$.
(v) $k \in \texttt{Even} \Rightarrow kl \in \texttt{Even}$.
(vi) $k, l \in \texttt{Odd} \Rightarrow kl \in \texttt{Odd}$.

BEWEIS. (i) Wenn $k = 2n$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$k^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2) \in \texttt{Even}.$$

(ii) Wenn $k = 2n + 1$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$k^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2[2n^2 + 2n] + 1 \in \texttt{Odd}.$$

(iii) Wenn $k^2 \in \texttt{Even}$ und $k \in \texttt{Odd}$, dann folgt aus (ii) $k^2 \in \texttt{Odd}$, was ein Wiederspruch ist.
(iv) Wenn $k^2 \in \texttt{Odd}$ und $k \in \texttt{Even}$, dann folgt aus (i) $k^2 \in \texttt{Even}$, was ein Wiederspruch ist.
(v)-(vi) Aufgabe. □

DEFINITION 1.3.7. Sei $\mathbb{Q}$ die *Menge der rationalen Zahlen*, definiert durch

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{k}{l} \mid k \in \mathbb{Z} \ \& \ l \in \mathbb{Z}^* \right\},$$

wobei

$$\mathbb{Z}^* = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \neq 0\}.$$

Es gilt $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$, weil $z = \frac{z}{1}$, für jedes $z \in \mathbb{Z}$, und $\frac{1}{2}$ ist in $\mathbb{Q}$ aber nicht in $\mathbb{Z}$.

LEMMA 1.3.8. *Es gibt keine rationale Zahl q mit $q^2 = 2$.*

BEWEIS. Sei $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$, und seien $k \in \mathbb{Z}$ und $l \in \mathbb{Z}^*$ mit

$$q = \frac{k}{l}.$$

Ohne Verlust der Allgemeinheit sei $q > 0$ und seien $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^*$, sodass k, l sind nicht gleichzeitig in $\texttt{Even}$ (warum ist das möglich?). Wenn $k^2 = 2l^2$, dann gilt $k^2 \in \texttt{Even}$, also gilt $k \in \texttt{Even}$. Sei $k = 2m$ für $m \in \mathbb{N}^+$. Weil $k^2 = 4m^2 = 2l^2$, dann gilt $l^2 = 2m^2$, also gelten $l^2 \in \texttt{Even}$ und $l \in \texttt{Even}$, was ein Wiederspruch ist. □

1.4. Die reellen Zahlen

Sei $\mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen. Die Axiome für $\mathbb{R}$ sind die folgenden:

(I) Axiome der Addition.

(II) Axiome der Multiplikation.

(III) Das Distributivgesetz.

(IV) Die Anordnungs-Axiome.

(V) Das Vollständigkeits-Axiom.

(I) Axiome der Addition: Es gibt eine Abbildung $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x + y,$$

sodass gilt:

(Add_1) [Assoziativgesetz] $x + (y + z) = (x + y) + z$, für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(Add_2) [Existenz der Null] Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$, sodass $0 + x = x$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

(Add_3) [Existenz des Negativen] Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert eine reelle Zahl $-x \in \mathbb{R}$, sodass $x + (-x) = 0$.

(Add_4) [Kommutativgesetz] $x + y = y + x$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Die Zahl 0 ist durch ihre Eigenschaft eindeutig bestimmt: Sei $0' \in \mathbb{R}$, sodass gilt $0' + x = x$, für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach den Axiomen (Add_2) und (Add_4) folgt daraus

$$0 = 0' + 0 = 0 + 0' = 0'.$$

Das Negative einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt: Sei $y \in \mathbb{R}$, sodass gilt $x + y = 0$. Nach den Axiomen $(\text{Add}_1), (\text{Add}_2)$ und (Add_4) folgt daraus

$$(-x) = 0+(-x) = (x+y)+(-x) = (y+x)+(-x) = y+(x+(-x)) = y+0 = y.$$

Definition 1.4.1. Für $x, y \in \mathbb{R}$ setz man

$$x - y = x + (-y).$$

Definition 1.4.2. Für $n \geq 1$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ setz man

$$\sum_{i=1}^{1} x_i = x_1,$$

und für $n > 1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + x_{n+1}.$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \ldots + x_n.$$

(II) Axiome der Multiplikation: Es gibt eine Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x \cdot y,$$

sodass gilt:

(Mult$_1$) [Assoziativgesetz] $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(Mult$_2$) [Existenz der Eins] Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, sodass gilt $1 \cdot x = x$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

(Mult$_3$) [Existenz des Inversen] Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gibt es ein $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$, sodass gilt $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

(Mult$_4$) [Kommutativgesetz] $x \cdot y = y \cdot x$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Wir schreiben auch xy statt $x \cdot y$. Die Zahl 1 ist durch ihre Eigenschaft eindeutig bestimmt, und das Inverse einer reellen Zahl $x \neq 0$ ist eindeutig bestimmt.

Definition 1.4.3. Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$ setzt man

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}.$$

Definition 1.4.4. Seien $n \geq 1$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\prod_{i=1}^{1} x_i = x_1,$$

und für $n > 1$

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot x_{n+1}.$$

Es gilt

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

DEFINITION 1.4.5. Ist $a \in \mathbb{R}$, so werden die Potenzen a^n für $n \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert

$$a^n := \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ a^{n-1}a & , n > 0. \end{cases}$$

Es gilt

$$a^n = \prod_{i=1}^{n} a.$$

Ist $a \neq 0$, so definiert man negative Potenzen a^{-n} $(n > 0)$ durch

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

SATZ 1.4.6. *Für die Potenzen gelten folgende Rechenregeln:*

$$a^{m+n} = a^m a^n,$$

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

$$a^n b^n = (ab)^n.$$

BEWEIS. Aufgabe. $\square$

(III) Distributivgesetz:
(Distr) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

SATZ 1.4.7. *Seien $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Es gelten:*
(i) $0 \cdot x = 0$.
(ii) $(-x)y = -(xy)$.
(iii) $(-x)(-y) = xy$.
(iv) $-(x + y) = -x - y$.
(v) Wenn $x, y \neq 0$, dann gilt $xy \neq 0$, und $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.
(vi) Wenn $z, w \neq 0$, dann gilt

$$\frac{x}{z}\frac{y}{w} = \frac{xy}{zw} \quad \& \quad \frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}.$$

(vii) Wenn $x \neq 0$ und $xy = xz$, dann gilt $y = z$.

BEWEIS. Aufgabe. $\square$

(IV) Die Anordnungs-Axiome: In $\mathbb{R}$ sind gewisse Elemente als positiv ausgezeichnet (Schreibweise $x > 0$), sodass folgende Axiome erfüllt sind.

(Anord$_1$) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen

$$x > 0 \text{ oder } x = 0 \text{ oder } -x > 0.$$

(Anord$_2$) Wenn $x > 0$ und $y > 0$, dann gilt $x + y > 0$ und $x \cdot y > 0$ (Summe und Produkt positiver Elemente sind wieder positiv).

Definition 1.4.8. Für reelle Zahlen x, y definiert man

$$x > y \Leftrightarrow x - y > 0,$$

$$y < x \Leftrightarrow x > y,$$

$$x < 0 \Leftrightarrow (-x) > 0,$$

$$x \geq y \Leftrightarrow x > y \text{ oder } x = y,$$

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \text{ oder } x = y.$$

Satz 1.4.9. *Seien $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Es gelten:*

(i) $1 > 0$.

(ii) $n \cdot 1 > 0$, *für alle* $n \in \mathbb{N}^+$.

(iii) Wenn $x, y < 0$, *dann gilt* $xy > 0$.

(iv) Wenn $x > 0$ *und* $y < 0$, *dann gilt* $xy < 0$.

(v) Wenn $x \neq 0$, *dann gilt* $x^2 > 0$.

(vi) Wenn $x > 0$, *dann gilt* $\frac{1}{x} > 0$.

(vii) Wenn $x < y$ *und* $y < z$, *dann gilt* $x < z$.

(viii) Wenn $x < y$ *und* $z \in \mathbb{R}$, *dann gilt* $x + z < y + z$.

(ix) Wenn $x < y$ *und* $z > 0$, *dann gilt* $xz < yz$.

(x) Wenn $x < y$ *und* $z < 0$, *dann gilt* $xz > yz$.

(xi) Wenn $x < y$ *und* $x, y > 0$, *dann gilt* $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

(xii) Wenn $xy = 0$, *dann gilt* $x = 0$ *oder* $y = 0$.

Beweis. Aufgabe. □

Definition 1.4.10. Sei die Abbildung $|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$x \mapsto |x|,$$

wobei

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

ist der *Absolut-Betrag* von x.

Satz 1.4.11. *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Es gelten:*
(i) $|x| = \max\{x, -x\}$.
(ii) $|x| \geq 0$.
(iii) $x \leq |x|$ *und* $-x \leq |x|$.
(iv) $|x| = |-x|$.
(v) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(vi) $|xy| = |x||y|$.
(vii) $|x|^2 = x^2$.
(viii) *[Dreiecks-Ungleichung]* $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Beweis. (vi) Es gilt

$$|xy| = \begin{cases} xy & , xy \geq 0 \Leftrightarrow x, y \geq 0 \text{ oder } x, y \leq 0 \\ -(xy) & , xy < 0 \Leftrightarrow [x > 0 \;\&\; y < 0] \text{ oder } [x < 0 \;\&\; y > 0] \end{cases}$$

und

$$|x||y| = \begin{cases} xy & , x \geq 0 \;\&\; y \geq 0 \\ -xy & , x \geq 0 \;\&\; y < 0 \\ -xy & , x < 0 \;\&\; y \geq 0 \\ (-x)(-y) = xy & , x < 0 \;\&\; y < 0. \end{cases}$$

(vii) Es gilt

$$|x|^2 = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ (-x)^2 = x^2 & , x < 0. \end{cases}$$

(viii) Aus (iii) folgt $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$. Es gilt

$$x + y \leq |x| + |y|.$$

Aus (iii) folgt $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$. Es gilt

$$(-x) + (-y) = -(x + y) \leq |x| + |y|.$$

Aus (i) folgt $|x + y| = \max\{x + y, -(x + y)\} \leq |x| + |y|$. □

Das Archimedische Axiom (Arch): Zu je zwei reellen Zahlen $x, y > 0$ existiert eine natürliche Zahl n mit $nx > y$

$$\text{(Arch)} \qquad \forall_{x,y\in\mathbb{R}}\Big([x > 0 \;\&\; y > 0] \Rightarrow \exists_{n\in\mathbb{N}}\big(nx > y\big)\Big).$$

Corollar 1.4.12. *Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n, sodass gilt $x < n$ & $-n < x$.*

Beweis. (i) Wenn $x = 0$, dann nehmen wir $n = 1$.
(ii) Wenn $x > 0$, dann folgt aus (Arch) für x und 1, dass es $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $n > x$, also gilt $-n < 0 < x < n$.
(iii) Wenn $x < 0$, dann gilt $-x > 0$. Aus (ii) folgt $-x < n$ & $-n < (-x)$, für ein $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $x < n$ & $-n < x$. □

Corollar 1.4.13. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n > 0$ mit*

$$\frac{1}{n} < \epsilon.$$

Beweis. Wenn $\varepsilon > 0$, dann gilt $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Nach Corollar 1.4.12 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Daher folgt $\frac{1}{n} < \varepsilon$. □

1.5. Folgen reeller Zahlen

Definition 1.5.1. Unter einer Folge reeller Zahlen versteht man eine Abbildung $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Jedem $n \in \mathbb{N}$ ist also ein

$$\alpha_n := \alpha(n) \in \mathbb{R}$$

zugeordnet. Man schreibt hierfür

$$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{oder} \quad (\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \quad \text{oder} \quad \big(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\big).$$

Beispiel 1.5.2. **(i)** Sei $x \in \mathbb{R}$, und sei $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\alpha_n = x,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Man erhält die konstante Folge

$$\big(x, x, x, \dots\big).$$

(ii) Sei $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\beta_n = \frac{1}{n+1},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Man erhält die Folge

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right).$$

(iii) Sei $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\gamma_n = (-1)^n,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Man erhält die Folge

$$\big(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\big).$$

(iv) Sei $\delta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\delta_n = \frac{n}{n+1},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Man erhält die Folge

$$\left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right).$$

(v) Sei $\zeta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\zeta_n = \frac{n}{2^n},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Man erhält die Folge

$$\left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}, \frac{4}{2^4} = \frac{1}{4}, \dots\right).$$

(vi) Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* $\mathtt{Fib} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\mathtt{Fib}_n := \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ 1 & , n = 1 \\ \mathtt{Fib}_{n-1} + \mathtt{Fib}_{n-2} & , n \geq 2. \end{cases}$$

Man erhält die Folge

$$\big(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\big).$$

(vii) Sei $x \in \mathbb{R}$, und sei $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\eta_n = x^n,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Man erhält die Folge

$$\big(1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\big).$$

Definition 1.5.3. Sei $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heisst *konvergent* gegen $x \in \mathbb{R}$, falls gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass gilt $|\alpha_n - x| < \varepsilon$, für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_\varepsilon$

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N_\varepsilon} \big(|\alpha_n - x| < \varepsilon \big).$$

Konvergiert $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x, so nennt man x den *Grenzenwert* oder den *Limes* der Folge und schreibt

$$\alpha_n \xrightarrow{n} x, \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = x, \quad \text{oder} \quad \lim \alpha_n = x.$$

Für $\varepsilon > 0$ versteht man unter der ε-*Umgebung* von $x \in \mathbb{R}$ die Menge aller Punkte der Zahlengeraden, die von x einen Abstand kleiner als ε haben. Dies ist das Interval

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \big\{ y \in \mathbb{R} \mid x - \varepsilon < y < x + \varepsilon \big\}.$$

Die Konvergenz-Bedingung lässt sich nun so formulieren: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass gilt

$$\alpha_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon),$$

für alle $n \geq N_\varepsilon$.

Definition 1.5.4. Eine folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, die nicht konvergiert, heisst *divergent*. Eine folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heisst *beschränkt*, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt, sodass gilt

$$|\alpha_n| \leq M,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 1.5.5. *Jede konvergente Folge* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist beschränkt.*

Beweis. Sei $\alpha_n \xrightarrow{n} x$. Dann gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, sodass gilt

$$\forall_{n \geq N_1} \big(|\alpha_n - x| < 1 \big).$$

Daraus folgt

$$|\alpha_n| = |\alpha_n - x + x| \leq |\alpha_n - x| + |x| < 1 + |x|,$$

für alle $n \geq N_1$. Wir setzen

$$M = \max \big\{ |\alpha_0|, \ldots, |\alpha_{N_1 - 1}|, 1 + |x| \big\}.$$

Damit gilt $|\alpha_n| \leq M$, für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Behandlung des Beispiels 1.5.2:

(i) Die konstante Folge $(x, x, x, \ldots)$ konvergiert gegen x: Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $N_\varepsilon = 0$. Es gilt

$$\forall_{n \geq 0} \big(|\alpha_n - x| = |x - x| = 0 < \varepsilon \big).$$

(ii) $\beta_n \xrightarrow{n} 0$: Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ mit

$$\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Damit ist

$$\forall_{n \geq N_\varepsilon - 1} \left(|\beta_n - 0| = |\beta_n| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon \right).$$

(iii) Die Folge $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert (Aufgabe).

(iv) $\delta_n \xrightarrow{n} 1$: Es gilt

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \left| \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

für alle $n \geq N$, wobei $N \in \mathbb{N}^+$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

(v) $\zeta_n \xrightarrow{n} 0$ (Aufgabe).

(vi) Die Folge $(\mathtt{Fib}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert (Aufgabe).

(vii) Das Konvergenzverhalten der Folge $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ hängt vom Wert von x ab. Wir unterscheiden vier Fälle.

(a) Für $|x| < 1$ gilt $x^n \xrightarrow{n} 0$ (Aufgabe).

(b) Für $x = 1$ ist $x^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $x^n \xrightarrow{n} 1$.

(c) Für $x = -1$ divergiert die Folge (x^n) (Beispiel (iii)).

(d) Für $|x| > 1$ divergiert die Folge (x^n), weil die Folge (x^n) unbeschränkt ist (Aufgabe).

Satz 1.5.6. *Seien $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen, und $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$. Seien die Folgen reeller Zahlen*

$$(\alpha + \beta)_{n \in \mathbb{N}},\ (\alpha \cdot \beta)_{n \in \mathbb{N}},\ (\lambda \alpha)_{n \in \mathbb{N}},$$

definiert durch

$$(\alpha + \beta)_n = \alpha_n + \beta_n,$$
$$(\alpha \cdot \beta)_n = \alpha_n \cdot \beta_n,$$
$$(\lambda \alpha)_n = \lambda \alpha_n,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$*. Wenn* $\beta_n \neq 0$*, für alle* $n \in \mathbb{N}$*, sei die Folge reeller Zahlen*

$$\left(\frac{1}{\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

definiert durch

$$\left(\frac{1}{\beta}\right)_n = \frac{1}{\beta_n},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$*. Wenn* $\alpha_n \xrightarrow{n} x$ *und* $\beta_n \xrightarrow{n} y$*, dann gilt das folgende:*
(i) $(\alpha+\beta)_n \xrightarrow{n} x+y$*.*
(ii) $(\alpha\cdot\beta)_n \xrightarrow{n} x\cdot y$*.*
(iii) $(\lambda\alpha)_n \xrightarrow{n} \lambda x$*.*
(iv) Wenn $y \neq 0$*, dann gibt es* $n_0 \in \mathbb{N}$*, sodass gilt* $\beta_n \neq 0$*, für alle* $n \geq n_0$*, und*

$$\left(\frac{1}{\beta}\right)_{n+n_0} \xrightarrow{n} \frac{1}{y},$$

und

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{n+n_0} \xrightarrow{n} \frac{x}{y}.$$

Beweis. Nach Definition 1.5.3

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon^\alpha\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N_\varepsilon^\alpha}\big(|\alpha_n - x| < \varepsilon\big).$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon^\beta\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N_\varepsilon^\beta}\big(|\beta_n - y| < \varepsilon\big).$$

(i) Nach der Driecks-Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned}|(\alpha+\beta)_n - (x+y)| &= |\alpha_n + \beta_n - x - y|\\ &= |(\alpha_n - x) + (\beta_n - y)|\\ &\leq |\alpha_n - x)| + |\beta_n - y|\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

für alle $n \geq N_\varepsilon^{\alpha+\beta} = \max\{N^\alpha_{\frac{\varepsilon}{2}}, N^\beta_{\frac{\varepsilon}{2}}\}$.

(ii) Sei $M > 0$ eine Schranke von α. Es gilt

$$\begin{aligned}|(\alpha\cdot\beta)_n - xy| &= |\alpha_n\beta_n - xy|\\ &= |\alpha_n\beta_n - \alpha_n y + \alpha_n y - xy|\\ &= |(\alpha_n\beta_n - \alpha_n y) + (\alpha_n y - xy)|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le |\alpha_n(\beta_n - y)| + |(\alpha_n - x)y| \\
&= |\alpha_n||\beta_n - y| + |\alpha_n - x||y| \\
&\le M|\beta_n - y| + |\alpha_n - x||y| \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + |y|\frac{\varepsilon}{2(|y|+1)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

für alle $n \ge N_\varepsilon^{\alpha\cdot\beta} = \max\{N^\beta_{\frac{\varepsilon}{2M}}, N^\alpha_{\frac{\varepsilon}{2(|y|+1)}}\}$.

(iii) Aufgabe.

(iv) Weil $\beta_n \xrightarrow{n} y$ gilt

$$|\beta_n - y| < \frac{|y|}{2},$$

für alle $n \ge n_0 = N^\beta_{\frac{|y|}{2}}$. Also für jedes $n \ge n_0$ gilt

$$-|\beta_n - y| > -\frac{|y|}{2}.$$

Nach Blatt 3, Aufgabe 3(iii) gilt

$$|x - y| \ge \big||x| - |y|\big| \ge |x| - |y|.$$

Also für jedes $n \ge n_0$ gilt

$$\begin{aligned}
|\beta_n| &= |y - (y - \beta_n)| \\
&\ge \big||y| - |\beta_n - y|\big| \\
&\ge |y| - |\beta_n - y| \\
&\ge |y| - \frac{|y|}{2} \\
&= \frac{|y|}{2} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Darüber hinaus es gilt

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{1}{\beta}\right)_n - \frac{1}{y}\right| &= \left|\frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{y}\right| \\
&= \left|\frac{y - \beta_n}{\beta_n y}\right|
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|\beta_n||y|}|\beta_n - y|$$
$$\leq \frac{2}{|y|}\frac{1}{|y|}\left(\frac{\varepsilon|y|^2}{2}\right)$$
$$= \varepsilon,$$

für alle $n \geq \max\{n_0, N^{\beta}_{\frac{\varepsilon|y|^2}{2}}\}$.
Die Konvergenz

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{n+n_0} \xrightarrow{n} \frac{x}{y}$$

folgt aus (ii) und die Konvergenz $\left(\frac{1}{\beta}\right)_{n+n_0} \xrightarrow{n} \frac{1}{y}$. □

Beispiel 1.5.7. (i) Wir betrachten als Beispiel die Folge

$$\alpha_n = \frac{4n^2 + 14n}{n^2 - 2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Für $n > 0$ kann man schreiben

$$\alpha_n = \frac{n^2(4 + 14\frac{1}{n})}{n^2(1 - 2\frac{1}{n^2})} = \frac{4 + 14\frac{1}{n}}{1 - 2\frac{1}{n^2}}.$$

Es gilt $\frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$, also gilt $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$ und $14\frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$, $-2\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n} 0$. Also gilt

$$\alpha_n \xrightarrow{n} 4.$$

(ii) Sei die Folge

$$\beta_n = \frac{4n^2 + 14n}{n^3 - 2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Für $n > 0$ kann man schreiben

$$\beta_n = \frac{n^2(4 + 14\frac{1}{n})}{n^3(1 - 2\frac{1}{n^3})} = \frac{1}{n}\left(\frac{4 + 14\frac{1}{n}}{1 - 2\frac{1}{n^3}}\right).$$

Es gilt $\frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$, also gilt $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$ und $14\frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$, $-2\frac{1}{n^3} \xrightarrow{n} 0$. Also gilt

$$\frac{4 + 14\frac{1}{n}}{1 - 2\frac{1}{n^3}} \xrightarrow{n} 4,$$

und $\beta_n \xrightarrow{n} 0$.

(iii) Sei die Folge
$$\gamma_n = \frac{4n^3 + 14n}{n^2 - 2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Für $n > 0$ kann man schreiben
$$\gamma_n = \frac{n^3(4 + 14\frac{1}{n^2})}{n^2(1 - 2\frac{1}{n^2})} = n\left(\frac{4 + 14\frac{1}{n^2}}{1 - 2\frac{1}{n^2}}\right).$$
Es gilt $\frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$, also gilt $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$ und $14\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n} 0$, $-2\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n} 0$. Also gilt
$$\frac{4 + 14\frac{1}{n^2}}{1 - 2\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n} 4,$$
und $\gamma_n \xrightarrow{n} +\infty$ d.h. γ ist divergent.

Satz 1.5.8. *Seien $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen, und seien $x, y \in \mathbb{R}$. Angenommen $\alpha_n \xrightarrow{n} x$, $\beta_n \xrightarrow{n} y$, und*
$$\alpha_n \leq \beta_n,$$
für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch $x \leq y$.

Beweis. Sei $\varepsilon = x - y > 0$. Für alle $n \geq N^{\alpha}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ gilt
$$|\alpha_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < \alpha_n - x < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\varepsilon}{2} < \alpha_n < x + \frac{\varepsilon}{2},$$
also gilt
$$\alpha_n > x - \frac{x - y}{2} = \frac{x + y}{2}.$$
Für alle $n \geq N^{\beta}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ gilt
$$|\beta_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < \beta_n - y < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow y - \frac{\varepsilon}{2} < \beta_n < y + \frac{\varepsilon}{2},$$
also gilt
$$\beta_n < y + \frac{x - y}{2} = \frac{x + y}{2}.$$
Somit gilt für alle $n \geq \max\left\{N^{\alpha}_{\frac{\varepsilon}{2}}, N^{\beta}_{\frac{\varepsilon}{2}}\right\}$
$$\beta_n < \frac{x + y}{2} < \alpha_n,$$
ein Widerspruch. Also gilt $x \leq y$. □

1.6. Das Vollständigkeits-Axiom

Mithilfe der bisher behandelten Axiome lässt sich nicht die Existenz von Irrationalzahlen beweisen, denn all diese Axiome (I), (II), (III) und (IV) gelten auch in $\mathbb{Q}$. Es ist ein weiteres Axiom nötig, das sogenannte Vollständigkeits-Axiom.

Eine charakteristische Eigenschaft konvergenter Folgen, die formuliert werden kann, ohne den Grenzwert der Folge zu nehmen, wurde von Cauchy entdeckt.

DEFINITION 1.6.1. Eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $C_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$, sodass gilt

$$|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon, \quad \text{für alle } n, m \geq C_\varepsilon$$

d.h.

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{C_\varepsilon\in\mathbb{N}^+}\forall_{n,m\geq C_\varepsilon}\big(|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon\big).$$

Eine Folge ist eine Cauchy-Folge, wenn die Folgenglieder untereinander beliebig wenig abweichen, falls nur die Indizes genügend groß sind.

SATZ 1.6.2. *Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen. Dann ist $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.*

BEWEIS. Sei $x \in \mathbb{R}$, sodass gilt $\alpha_n \xrightarrow{n} x$. Es gilt

$$|\alpha_n - \alpha_m| = |\alpha_n - x + x - \alpha_m| \leq |\alpha_n - x| + |x - \alpha_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

für alle $n, m \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}} = C_\varepsilon$. □

Die Umkehrung von Satz 1.6.2 formulieren wir nun als Axiom.

Vollständigkeits-Axiom (VA): In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchy-Folge.

Nun beweisen wir als Anwendung des Vollständigkeits-Axioms die Existenz der Wurzeln positiver reeller Zahlen.

THEOREM 1.6.3. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b > 0$. Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch*

$$\alpha_0 = b,$$
$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_n + \frac{a}{\alpha_n}\right).$$

Dann gilt:

(i) $\alpha_n > 0$, *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $\alpha_n^2 \geq a$, *für alle* $n \geq 1$.
(iii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$, *für alle* $n \geq 1$.
(iv) Sei $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ *definiert durch*

$$\beta_n = \frac{a}{\alpha_n}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Dann gilt:
(a) $\beta_n^2 \leq a$, *für alle* $n \geq 1$,
(b) $\beta_n \leq \alpha_m$, *für alle* $n, m \geq 1$, *and*
(c)

$$\alpha_n - \beta_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}(\alpha_1 - \beta_1),$$

für alle $n \geq 1$.
(v) Die Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ist eine Cauchy-Folge.*
(vi) Sei $x \in \mathbb{R}$ *mit* $\alpha_n \xrightarrow{n} x$. *Es gilt* $x \geq 0$ *und* $x^2 = a$.

Beweis. (i) Man nutzt das Induktionsprinzip IND.
(ii) Es gilt

$$\alpha_n^2 - a = \frac{1}{4}\left(\alpha_{n-1} + \frac{a}{\alpha_{n-1}}\right)^2 - a \geq 0.$$

(iii) Aus (i) und (ii) folgt

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} \geq 0.$$

(iv)-(vi) Aufgabe. □

Sei die Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$\alpha_0 = 1,$$
$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_n + \frac{2}{\alpha_n}\right).$$

Nach dem Theorem 1.6.3 folgt

$$\alpha_n \xrightarrow{n} \sqrt{2}.$$

Mithilfe des Induktionsprinzips IND kann man zeigen

$$\forall_{n \in \mathbb{N}}\big(\alpha_n \in \mathbb{Q}\big)$$

d.h. die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erfüllt nicht das Vollständigkeits-Axiom.

THEOREM 1.6.4. *Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b > 0$. Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch*

$$\alpha_0 = b,$$
$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)\alpha_n + \frac{a}{\alpha_n^{k-1}}\right).$$

Es gelten:

(i) $\alpha_n > 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

(v) Die Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

(vi) Wenn $x \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_n \xrightarrow{n} x$, dann gilt $x \geq 0$ und $x^k = a$.

DEFINITION 1.6.5. Die Menge $\mathbb{I}$ der *irrationalen* Zahlen ist definiert durch

$$\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$$

d.h. $\mathbb{I}$ ist das Komplement von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Es gilt $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{I}$.

1.7. Unendliche Reihen

DEFINITION 1.7.1. Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge der *Partialsummen* $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert durch

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann schreiben wir

$$x = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sigma_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n.$$

Wenn $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann schreiben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Wenn $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist, dann schreiben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \notin \mathbb{R}.$$

BEISPIEL 1.7.2. Sei $\alpha_n = 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen der Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die Glieder

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0.$$

Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = 0.$$

BEISPIEL 1.7.3. Sei $x \neq 0$, und sei $\alpha_n = x$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen der Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die Glieder

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = x + x + \ldots + x = (n+1)x.$$

Nach dem Archidemishen-Axiom ist die Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \notin \mathbb{R}.$$

Sei $n \geq m$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sigma_n - \sigma_m &= \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{m} \alpha_k\right) \\
&= \big(\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_m + \alpha_{m+1} + \ldots \alpha_n\big) - \big(\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_m\big) \\
&= \alpha_{m+1} + \ldots + \alpha_n \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k.
\end{aligned}$$

Daruber hinaus gilt

$$\begin{aligned}
\sigma_n - \sigma_{n-1} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k\right) \\
&= \big(\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n\big) - \big(\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}\big) \\
&= \alpha_n.
\end{aligned}$$

Übrigens lässt sich jede Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch als Reihe darstellen, denn es gilt

$$\alpha_n = \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0) + (\alpha_2 - \alpha_1) + \ldots + (\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

$$= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_{k-1})$$
$$= \alpha_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k).$$

Eine solche Darstellung, in der sich zwei aufeinander folgende terme immer zur Hälfte wegkürzen, nenn man auch *Telescop-Summe*.

SATZ 1.7.4. *Seien* $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen reeller Zahlen, sodass gilt*

$$\gamma_k = \alpha_k - \alpha_{k-1},$$

für alle $k \geq 1$, *und* $\lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n = x$, *wobei* $x \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = x - \alpha_0.$$

BEWEIS. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) = \alpha_n - \alpha_0.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \right) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \big(\alpha_n - \alpha_0\big) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n - \lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_0 \\ &= x - \alpha_0.\end{aligned}$$

□

BEISPIEL 1.7.5. Sei die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Es gilt

$$\gamma_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k} = \alpha_k - \alpha_{k-1},$$

wobei

$$\alpha_n = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt $\alpha_0 = 0$ und $x = \lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n = 1$. Deshalb gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - 0 = 1.$$

SATZ 1.7.6. *Seien* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen reeller Zahlen, und seien* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*. Wenn*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \& \quad \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \in \mathbb{R},$$

dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(\lambda\alpha_n + \mu\beta_n\big) \in \mathbb{R}, \quad \textit{und}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(\lambda\alpha_n + \mu\beta_n\big) = \lambda\bigg(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\bigg) + \mu\bigg(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n\bigg).$$

BEWEIS. Seien die Folgen

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k; \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k; \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Es gelten

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} \sigma_n = x,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} \tau_n = y,$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Sei die Folge

$$\chi_n = \lambda\sigma_n + \mu\tau_n; \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Aus dem Satz 1.5.6 folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \big(\lambda\alpha_n + \mu\beta_n\big) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \chi_n \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \big[\lambda\sigma_n + \mu\tau_n\big] \\
&= \lambda \lim_{n\longrightarrow\infty} \sigma_n + \mu \lim_{n\longrightarrow\infty} \tau_n \\
&= \lambda x + \mu y
\end{aligned}$$

$$= \lambda\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\right) + \mu\left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n\right). \qquad \square$$

Beispiel 1.7.7. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} = 5\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\right) = 5 \cdot 1 = 5.$$

Satz 1.7.8 (Unendliche geometrische Reihe). *Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \in \mathbb{R} \quad \& \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$(1-x)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = 1 - x^{n+1}.$$

Wegen $x \neq 1$ gilt

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Es gilt $|x| < 1$, also (Aufgabe 4(ii)(a), Blatt 3) $\lim_{n\longrightarrow\infty} x^{n+1} = 0$, und

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sigma_n \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \left[\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right] \\
&= \frac{\lim_{n\longrightarrow\infty} \left[1-x^{n+1}\right]}{\lim_{n\longrightarrow\infty}(1-x)} \\
&= \frac{1-\lim_{n\longrightarrow\infty} x^{n+1}}{1-x} \\
&= \frac{1}{1-x}.
\end{aligned} \qquad \square$$

Beispiel 1.7.9. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Nach dem Satz 1.7.8 gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

und

$$2 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

1.8. Konvergenzkriterien für Reihen

SATZ 1.8.1 (Cauchysches-Konvergenz-Kriterium). *Sei $(\alpha_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{C_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq m \geq C_\varepsilon} \left(\left| \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k \right| < \varepsilon \right).$$

BEWEIS. Nach dem Satz 1.6.2 und nach dem Vollstandihkeits-Axiom konvergiert die Folge $(\sigma_n)_n$ genau dann, wenn gilt "für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $C_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass gilt

$$|\sigma_n - \sigma_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k \right| < \varepsilon,$$

für alle $n \geq m \geq C_\varepsilon$".

SATZ 1.8.2 (Divergenz-Kriterium). *Sei $(\alpha_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen. Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ konvergiert, dann gilt* $\lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n = 0$.

BEWEIS. Nach dem Cauchysches-Konvergenz-Kriterium gilt

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{C_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq C_\varepsilon + 1} \left(\left| \sum_{k=n-1}^{n} \alpha_k \right| = |\alpha_n| < \varepsilon \right).$$ □

BEISPIEL 1.8.3. Wenn $x \neq 0$, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x \notin \mathbb{R},$$

weil die konstante Folge x nicht gegen 0 konvergiert.

Die Umkehrung des Satzes 1.8.2 gilt nicht: Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty, \quad \text{aber} \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

DEFINITION 1.8.4. Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ heißt *absolut konvergent*, falls

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|\in\mathbb{R}.$$

SATZ 1.8.5. *Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|\in\mathbb{R} \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\in\mathbb{R}.$$

BEWEIS. Aufgabe. □

SATZ 1.8.6 (Majoranten-Kriterium). *Seien $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\big(|\alpha_n|\le\beta_n\big), \qquad \textit{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\in\mathbb{R}.$$

Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|\in\mathbb{R}.$$

BEWEIS. Nach dem Cauchysches-Konvergenz-Kriterium gilt

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{C_\varepsilon^\beta\in\mathbb{N}}\forall_{n\ge m\ge C_\varepsilon^\beta}\left(\left|\sum_{k=m+1}^{n}\beta_k\right|<\varepsilon\right).$$

Sei $C_\varepsilon^{|\alpha|}=C_\varepsilon^\beta$. Für alle $n\ge m\ge C_\varepsilon^{|\alpha|}$ gilt

$$\sum_{k=m+1}^{n}|\alpha_k|\le\sum_{k=m+1}^{n}\beta_k\le\left|\sum_{k=m+1}^{n}\beta_k\right|<\varepsilon.$$

Nach dem Cauchysches-Konvergenz-Kriterium es gilt $\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|\in\mathbb{R}$. □

Zum Beispiel gilt (Aufgabe)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\in\mathbb{R}, \qquad k\ge 2.$$

SATZ 1.8.7 (Quotienten-Kriterium). *Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\alpha_n\neq 0$, für alle $n\ge n_0$. Sei $\theta\in\mathbb{R}$ mit*

(i) $0 < \theta < 1$, *und*
(ii) für alle $n \geq n_0$ *gilt*

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| \leq \theta.$$

Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \in \mathbb{R}.$$

BEWEIS. Weil

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| = \sum_{k=0}^{n_0-1} |\alpha_k| + \sum_{k=n_0}^{\infty} |\alpha_k|,$$

reicht es, folgendes zu zeigen:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |\alpha_k| \in \mathbb{R}.$$

Ohne Verlust der Allgemeinheit, nehmen wir an $\alpha_n \neq 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Mithilfe des Induktionsprinzips IND folgt aus (ii) folgendes

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\big(|\alpha_n| \leq |\alpha_0|\theta^n\big).$$

Sei die Folge

$$\beta_n = |\alpha_0|\theta^n; \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_0|\theta^n = |\alpha_0|\left(\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n\right) = |\alpha_0|\frac{1}{1-\theta} \in \mathbb{R}.$$

Durch Verwenden des Majoranten-Kriteriums ergibt sich $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \in \mathbb{R}$.
□

KAPITEL 2

Stetigkeit

2.1. Der Graph einer reellen Funktion

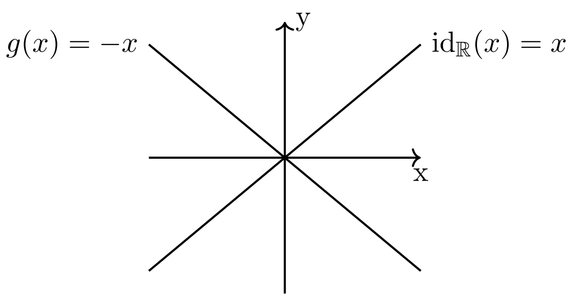
DEFINITION 2.1.1. Eine *reelle Funktion* ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$, wobei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Der *Graph* $\mathrm{Gr}(f)$ von f ist die Menge

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}.$$

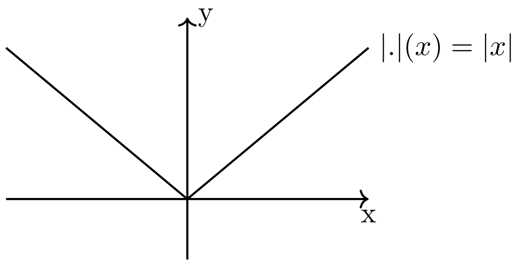
Jede parallele Gerade zur y-Achse schneidet den Graphen einer Funktion höchstens einmal.

BEISPIEL 2.1.2. Sei $c \in \mathbb{R}$. Die *konstante Funktion* c ist die Funktion $f_c : D \to \mathbb{R}$, definiert durch $f_c(x) = c$, für alle $x \in \mathbb{R}$. Wenn $D = \mathbb{R}$, ist der Graph von f_c eine horizontale Linie parallel zur x-Achse.

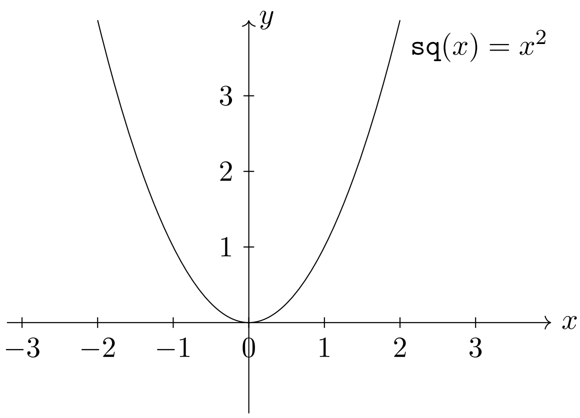
BEISPIEL 2.1.3. Die *identische Abbildung* $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $x \mapsto x$, für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(x) = -x$, für alle $x \in \mathbb{R}$ d.h. $g = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Der Graph von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und der Graph von g sind wie folgt:



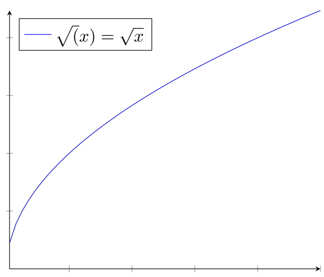
BEISPIEL 2.1.4. Die *Betragsfunktion* $|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $x \mapsto |x|$, für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Graph von $|.|$ ist wie folgt:



Beispiel 2.1.5. Die *quadratische Funktion* $\mathtt{sq} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $\mathtt{sq}(x) = x^2$, für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Graph von $\mathtt{sq}$ ist die folgende Kurve:



Beispiel 2.1.6. Die *Quadratwurzelfunktion* $\sqrt{\ } : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $\sqrt{}(x) = \sqrt{x}$, für alle $x \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von $\sqrt{\ }$ ist die folgende Kurve:



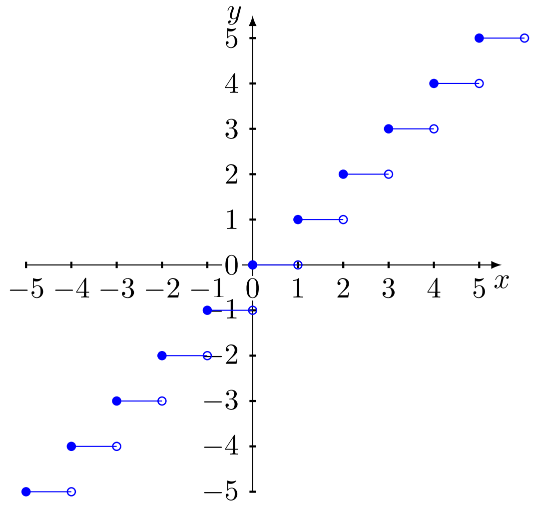
Beispiel 2.1.7. Die *Dirichlet-Funktion* $\mathtt{Dir} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\mathtt{Dir}(x) := \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

Beispiel 2.1.8. Die *floor-Funktion* $\lfloor . \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $\lfloor x \rfloor$ ist die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Der Graph von $\lfloor . \rfloor$ ist wie folgt:



Definition 2.1.9. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Seien die Funktionen $f + g, \lambda f, f \cdot g : D \to \mathbb{R}$, definiert duech

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

für alle $x \in D$. Sei

$$D_g^* = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}.$$

Die Funktion $\frac{f}{g} : D_g^* \to \mathbb{R}$, ist definiert durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

für alle $x \in D_g^*$.

Der Graph von $-f$ ergibt sich als Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse.

Beispiel 2.1.10. Die Funktion $\frac{1}{\mathtt{sq}} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, wobei $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$, ist definiert durch

$$\left(\frac{1}{\mathtt{sq}}\right)(x) = \frac{1}{x^2},$$

für alle $x \in \mathbb{R}^*$.

Beispiel 2.1.11. Eine *Polynomfunktion* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch,

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k \\ &= a_0 \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^0 + a_1 \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^1 + \ldots a_n \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n \\ &= a_0 + a_1 \mathrm{id}_{\mathbb{R}} + a_2 \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 + \ldots + a_n \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n, \end{aligned}$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ die *Koeffizienten* von p sind. Wenn $a_n \neq 0$, dann ist n der *Grad* von p. Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k\right)(x) \\ &= \big(a_0 + a_1 \mathrm{id}_{\mathbb{R}} + a_2 \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 + \ldots + a_n \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n\big)(x) \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n. \end{aligned}$$

Die identische Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ist eine Polynomfunktion ersten Grades mit Koeffizienten $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Die quadratische Funktion $\mathtt{sq}(x) = x^2$ ist eine Polynomfunktion zweiten Grades mit Koeffizienten $a_0 = a_1 = 0$ und $a_2 = 1$.

Beispiel 2.1.12. Seien die Polynomfunktionen

$$p = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k \quad \& \quad q = \sum_{k=0}^{m} b_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k.$$

Die *rationale Funktion* $R_{pq} : D_q^* \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} R_{pq}(x) &= \frac{p(x)}{q(x)} \\ &= \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k\right)(x)}{\left(\sum_{k=0}^{m} b_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k\right)(x)} \end{aligned}$$

$$= \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m},$$

wobei

$$D_q^* = \{x \in \mathbb{R} \mid b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m \neq 0\}.$$

Definition 2.1.13. Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$, sodass gilt

$$\mathtt{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in D\} \subseteq E.$$

Die *Komposition* $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ von f und g ist definiert, für alle $x \in D$, durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & E \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

Beispiel 2.1.14. Sei $\mathtt{sq}(x) = x^2$. Es gilt $(\sqrt{} \circ \mathtt{sq})(x) = \sqrt{}(\mathtt{sq}(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\mathtt{sq}"] \arrow[rr, bend right, "\sqrt{} \circ \mathtt{sq} = |.|"'] & \mathbb{R}^+ \arrow[r, "\sqrt{}"] & \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

Seien $c > 0$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und seien die Funktionen $f_c^*, f_{-c}^*, g_c^*, g_{-c}^*\colon D \to \mathbb{R}$ werden definiert durch

$$\begin{aligned} f_c^*(x) &= f(x) + c; \quad & x \in D, \\ f_{-c}^*(x) &= f(x) - c; \quad & x \in D, \\ g_c^*(x) &= f(x + c); \quad & x \in D, \\ g_{-c}^*(x) &= f(x - c); \quad & x \in D. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich der Graph von f_c^* (f_{-c}^*) aus dem Graphen von f indem er parallel zur y-Achse nach oben (unten) um c verschoben wird. Der Graph von g_c^* (g_{-c}^*) ergibt sich aus dem Graphen von f indem er parallel zur x-Achse nach links (rechts) um c verschoben wird.

Jede parallele Gerade zur x-Achse schneidet den Graphen einer Injektion höchstens einmal und jede parallele zur x-Achse schneidet den Graphen einer Surjektion mindestens einmal.

2.2. Grenzwerte

Definition 2.2.1. Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, und $x_0, l \in \mathbb{R}$. Sei

$$\mathbb{F}(\mathbb{N}) = \{\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}.$$

(i) Sei $D(x_0)$ die Menge aller Folgen reeller Zahlen in D die gegen x_0 konvergieren d.h.

$$D(x_0) = \{\alpha \in \mathbb{F}(\mathbb{N}) \mid \forall_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_n \in D) \ \& \ \lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n = x_0\}.$$

Sei $D(x_0)$ eine nicht-leere Menge ist, dann heißt x_0 ein *Berührpunkt* von D und wir definieren

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = l :\Leftrightarrow \forall_{\alpha\in D(x_0)}\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} f(\alpha_n) = l\right)$$

d.h.

$$\left[\lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n = x_0\right] \Rightarrow \left[\lim_{n\longrightarrow\infty} f(\alpha_n) = l\right],$$

für alle Folgen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen in D.

(ii) Sei die Menge

$$D^+(x_0) = \{\alpha \in \mathbb{F}(\mathbb{N}) \mid \forall_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_n \in D \ \& \ \alpha_n > x_0) \ \& \lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n = x_0\}.$$

Sei $D^+(x_0)$ eine nicht-leere Menge. Wir definieren

$$\lim_{x\longrightarrow x_0^+} f(x) = l :\Leftrightarrow \forall_{\alpha\in D^+(x_0)}\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} f(\alpha_n) = l\right).$$

(iii) Sei die Menge

$$D^-(x_0) = \{\alpha \in \mathbb{F}(\mathbb{N}) \mid \forall_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_n \in D \ \& \ \alpha_n < x_0) \ \& \lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n = x_0\}.$$

Sei $D^-(x_0)$ eine nicht-leere Menge. Wir definieren

$$\lim_{x\longrightarrow x_0^-} f(x) = l :\Leftrightarrow \forall_{\alpha\in D^-(x_0)}\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} f(\alpha_n) = l\right).$$

(iv) Sei D *nach oben unbeschränkt* d.h.

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{x\in D}(x \geq n).$$

Sei die Menge

$$D(+\infty) = \{\alpha \in \mathbb{F}(\mathbb{N}) \mid \forall_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_n \in D) \ \& \ \lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n = +\infty\},$$

wobei

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n = +\infty \Leftrightarrow \forall_{M>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N}\big(\alpha_n \geq M\big).$$

Sei $D(+\infty)$ eine nicht-leere Menge. Wir definieren

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = l :\Leftrightarrow \forall_{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\in D(+\infty)}\Big(\lim_{n\longrightarrow\infty} f(\alpha_n) = l\Big).$$

(v) Sei D *nach unten unbeschränkt* d.h.

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{x\in D}(x \leq -n).$$

Sei die Menge

$$D(-\infty) = \{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \mid \forall_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_n \in D) \; \& \lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n = -\infty\},$$

wobei

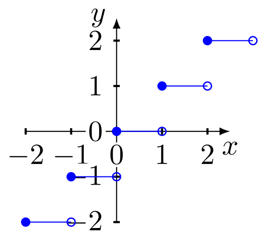
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n = -\infty \Leftrightarrow \forall_{M>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N}\big(\alpha_n \leq -M\big).$$

Sei $D(-\infty)$ eine nicht-leere Menge. Wir definieren

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = l :\Leftrightarrow \forall_{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\in D(-\infty)}\Big(\lim_{n\longrightarrow\infty} f(\alpha_n) = l\Big).$$

Wenn $x_0 \in D$, dann ist x_0 ein Berührpunkt von D, weil die konstante Folge x_0 zur $D(x_0)$ gehört.

Beispiel 2.2.2. Sei die floor-Funktion $\lfloor . \rfloor$.



Es gilt

$$\lim_{x\longrightarrow0^+} \lfloor x \rfloor = 0 \quad \& \quad \lim_{x\longrightarrow0^-} \lfloor x \rfloor = -1;$$

Wenn $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+(0)$, dann gilt $\alpha_n > 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil $\lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n = 0$, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass gilt $\alpha_n \in (0,1]$, für alle $n \geq n_0$. Also gilt $\lfloor \alpha_n \rfloor = 0$, für alle $n \geq n_0$, und

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \lfloor \alpha_n \rfloor = \lim_{n\longrightarrow\infty} 0 = 0.$$

Wenn $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^-(0)$, dann gilt $\alpha_n < 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil $\lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n = 0$, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass gilt $\alpha_n \in (-1,0]$, für alle $n \geq n_0$. Also gilt $\lfloor \alpha_n \rfloor = -1$, für alle $n \geq n_0$, und

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \lfloor \alpha_n \rfloor = \lim_{n\longrightarrow\infty} -1 = -1.$$

2.3. Stetigkeit

Definition 2.3.1. Seien D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ (also gilt $D(x_0) \neq \emptyset$). Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig im Punkt* x_0, falls

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Die Funktion f heißt *stetig in* D, falls f in jedem Punkt von D stetig ist.

Nach Definition 2.2.1 ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $x_0 \in D$ genau dann, wenn

$$\left[\lim_{n \longrightarrow \infty} \alpha_n = x_0\right] \Rightarrow \left[\lim_{n \longrightarrow \infty} f(\alpha_n) = f(x_0)\right],$$

für alle Folgen $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen in D.

Beispiel 2.3.2. Die konstante Funktion $f_c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f_c(x) = c$, für jedes $x \in \mathbb{R}$, wobei $c \in \mathbb{R}$, ist eine überall stetige Funktion. Seien $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \longrightarrow \infty} \alpha_n = x_0$. Es gilt

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f_c(\alpha_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} c = f_c(x_0).$$

Beispiel 2.3.3. Die identische Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) = x$, für jedes $x \in \mathbb{R}$, ist eine überall stetige Funktion. Sei $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \longrightarrow \infty} \alpha_n = x_0$. Es gilt

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\alpha_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \alpha_n = x_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x_0).$$

Beispiel 2.3.4. Sei $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Die Funktion $\sqrt{} \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, definiert durch $\sqrt{}(x) = \sqrt{x}$, für jedes $x \in \mathbb{R}^+$ ist stetig in $\mathbb{R}^+$. Zuerst zeigen wir, dass die Funktion $\sqrt{}$ stetig im $x_0 = 0$ ist. Sei $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim_{n \longrightarrow \infty} \alpha_n = 0$, d.h.

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_\varepsilon^\alpha \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N_\varepsilon^\alpha} \big(|\alpha_n - 0| = |\alpha_n| = \alpha_n < \varepsilon\big).$$

Wir zeigen, dass $\lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt{\alpha_n} = \sqrt{0} = 0$, d.h.

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_\varepsilon^{\sqrt{\alpha}} \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N_\varepsilon^{\sqrt{\alpha}}} \big(|\sqrt{\alpha_n} - 0| = |\sqrt{\alpha_n}| = \sqrt{\alpha_n} < \varepsilon\big).$$

Sei $\varepsilon > 0$. Also gilt $\varepsilon^2 > 0$. Sei $n \geq N_{\varepsilon^2}^\alpha = N_\varepsilon^{\sqrt{\alpha}}$. Es gilt

$$\alpha_n < \varepsilon^2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha_n} < \varepsilon.$$

Seien $x_0 > 0$ und $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim_{n \longrightarrow \infty} \alpha_n = x_0$, d.h.

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_\varepsilon^\alpha \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N_\varepsilon^\alpha} \big(|\alpha_n - x_0| < \varepsilon\big).$$

Wir zeigen, dass $\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt{\alpha_n}=\sqrt{x_0}$, d.h.

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon^{\sqrt{\alpha}}\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N_\varepsilon^{\sqrt{\alpha}}}\big(|\sqrt{\alpha_n}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon\big).$$

Sei $n\geq N^\alpha_{\varepsilon\sqrt{x_0}}=N_\varepsilon^{\sqrt{\alpha}}$. Es gilt

$$\begin{aligned}|\sqrt{\alpha_n}-\sqrt{x_0}| &= |\sqrt{\alpha_n}-\sqrt{x_0}|\left(\frac{|\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{x_0}|}{|\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{x_0}|}\right)\\ &= \Big(|\sqrt{\alpha_n}-\sqrt{x_0}||\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{x_0}|\Big)\frac{1}{|\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{x_0}|}\\ &= \Big(|\big(\sqrt{\alpha_n}-\sqrt{x_0}\big)\big(\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{x_0}\big)|\Big)\frac{1}{|\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{x_0}|}\\ &= \Big(|(\sqrt{\alpha_n})^2-(\sqrt{x_0})^2|\Big)\frac{1}{|\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{x_0}|}\\ &= \Big(|\alpha_n-x_0|\Big)\frac{1}{|\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{x_0}|}\\ &< \varepsilon\cdot\left(\sqrt{x_0}\frac{1}{|\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{x_0}|}\right)\\ &< \varepsilon\cdot 1\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Die in Beispiel 2.1.7 definierte Dirichletsche Funktion ist in keinem Punkt $x\in\mathbb{R}$ stetig (Blatt 7, Aufgabe 4).

Satz 2.3.5. *Seien $D\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in D$, $f,g:D\to\mathbb{R}$, und $\lambda\in\mathbb{R}$.*

(I) Angenommen die Funktionen f,g sind stetig im Punkt x_0.

(i) Dann sind auch die Funktionen $f+g,\lambda f,f\cdot g:D\to\mathbb{R}$ (Definition 2.1.9) im Punkt x_0 stetig.

(ii) Ist $g(x_0)\neq 0\Leftrightarrow x_0\in D_g^*$, so ist auch die Funktion $\frac{f}{g}:D_g^*\to\mathbb{R}$ in x_0 stetig. Dabei ist $D_g^*=\{x\in D\mid g(x)\neq 0\}$.

(II)(i) Angenommen die Funktionen f,g sind stetig in D. Dann sind auch die Funktionen $f+g,\lambda f,f\cdot g:D\to\mathbb{R}$ in D stetig.

(ii) Angenommen die Funktionen f,g sind stetig in D_g^*. Dann ist die Funktion $\frac{f}{g}:D_g^*\to\mathbb{R}$ in D_g^* stetig.

Beweis. (I)(i) Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen in D, sodass gilt $\lim_{n\longrightarrow\infty}\alpha_n=x_0$. Nach dem Satz 1.5.6 gelten

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\big(f+g\big)(\alpha_n)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\big[f(\alpha_n)+g(\alpha_n)\big]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} f(\alpha_n) + \lim_{n\longrightarrow\infty} g(\alpha_n)\\
&= f(x_0) + g(x_0)\\
&= \big(f+g\big)(x_0),
\end{aligned}$$

und

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \big(\lambda f\big)(\alpha_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \lambda f(\alpha_n) = \lambda \lim_{n\longrightarrow\infty} f(\alpha_n) = \lambda f(x_0) = \big(\lambda f\big)(x_0),$$

und

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty} \big(f\cdot g\big)(\alpha_n) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \big[f(\alpha_n)\cdot g(\alpha_n)\big]\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} f(\alpha_n)\cdot \lim_{n\longrightarrow\infty} g(\alpha_n)\\
&= f(x_0)\cdot g(x_0)\\
&= \big(f\cdot g\big)(x_0).
\end{aligned}$$

(I)(ii) Sei $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen in D_g^* mit $\lim_{n\longrightarrow\infty}\beta_n = x_0$. Nach Satz 1.5.6 gilt

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{f}{g}\right)(\beta_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{f(\beta_n)}{g(\beta_n)} = \frac{\lim_{n\longrightarrow\infty} f(\beta_n)}{\lim_{n\longrightarrow\infty} g(\beta_n)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0).$$

(II)(i) folgt aus (I)(i) und (II)(ii) folgt aus (I)(ii).

Corollar 2.3.6. *Alle Polynomfunktionen und alle rationalen Funktionen sind stetig in ihrem Definitionsbereich.*

Beweis. Aus Satz 2.3.5(II)(i) folgt, dass eine Polynomfunktion

$$p = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k$$

stetig ist. Aus Satz 2.3.5(II)(ii) folgt, dass eine rationale Funktion $R_{pq} : D_q^* \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\begin{aligned}
R_{pq}(x) &= \frac{p(x)}{q(x)}\\
&= \frac{\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k\Big)(x)}{\Big(\sum_{k=0}^{m} b_k \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^k\Big)(x)},
\end{aligned}$$

wobei

$$D_q^* = \{x\in\mathbb{R} \mid b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m \neq 0\}$$

auch stetig ist. □

Satz 2.3.7 (Komposition stetiger Funktionen). *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und $y_0 \in E$, und seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit*

$$\mathtt{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in D\} \subseteq E.$$

(i) Die Funktion f sei in x_0 und g in $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist die Funktion $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.

(ii) Die Funktion f sei in D und g in E stetig. Dann ist die Funktion $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig in D.

Beweis. (i) Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen in D, sodass gilt $\lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n = x_0$. Wegen der Stetigkeit von f in x_0 gilt

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(\alpha_n) = f(x_0) = y_0.$$

Nach Voraussetzung gilt $\beta_n = f(\alpha_n) \in E, \quad n \in \mathbb{N}$, und

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \beta_n = y_0.$$

Da g in y_0 stetig ist, gilt

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} g\big(\beta_n\big) = g(y_0).$$

Deshalb folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty} \big(g \circ f\big)(\alpha_n) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} g\big(f(\alpha_n)\big)\\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} g\big(\beta_n\big)\\ &= g(y_0)\\ &= g(f(x_0))\\ &= \big(g \circ f\big)(x_0).\end{aligned}$$

(ii) folgt aus (i). $\square$

Beispiel 2.3.8. Die Funktion $\mathtt{sq}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, wobei $\mathtt{sq}(x) = x^2$, für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist stetig in $\mathbb{R}$. Nach dem Beispiel 2.3.4 die Funktion $\sqrt{}$ ist stetig in $\mathbb{R}^+$. Dann ist auch die Funktion $|.| = \sqrt{} \circ \mathtt{sq}$ stetig in $\mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\mathtt{sq}"] \arrow[rr, bend right, "\sqrt{} \circ \mathtt{sq} = |.|"'] & \mathbb{R}^+ \arrow[r, "\sqrt{}"] & \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

weil $(\sqrt{} \circ \mathtt{sq})(x) = \sqrt{}(\mathtt{sq}(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$.

2.4. Der Zwischenwertsatz

THEOREM 2.4.1 (Zwischenwertsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion in $[a, b]$ mit $f(a)f(b) < 0$. Dann existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = 0$.*

BEWEIS. Die Bedingung $f(a)f(b) < 0$ ist äquivalent zur Disjunktion

$$\big[f(a) < 0 \;\&\; f(b) > 0\big] \quad \text{oder} \quad \big[f(a) > 0 \;\&\; f(b) < 0\big].$$

Die Aussage des Satzes ist anschaunlich klar. Sie bedarf aber natürlich dennoch eines Beweises, da eine Zeichnung kein Beweis ist.

Sei $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Wir definieren induktiv eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass gilt:

(1) $[\alpha_0, \beta_0] \supseteq [\alpha_1, \beta_1] \supseteq [\alpha_2, \beta_2] \ldots \supseteq [\alpha_n, \beta_n] \supseteq [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \supseteq \ldots$.

(2) $\beta_n - \alpha_n = \frac{b-a}{2^n}$.

(3) $f(\alpha_n) \leq 0$, für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(4) $f(\beta_n) \geq 0$, für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Wir setzen $\alpha_0 = a$ und $\beta_0 = b$. Sei das Intervall $[\alpha_n, \beta_n]$ bereits definiert. Wir setzen

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_n + \beta_n}{2} & \text{, wenn } f\left(\dfrac{\alpha_n + \beta_n}{2}\right) \leq 0 \\ \alpha_n & \text{, anderfalls} \end{cases}$$

$$\beta_{n+1} = \begin{cases} \beta_n & \text{, wenn } f\left(\dfrac{\alpha_n + \beta_n}{2}\right) \leq 0 \\ \dfrac{\alpha_n + \beta_n}{2} & \text{, anderfalls} \end{cases}$$

Offenbar sind die Eigenschaften $(1) - (4)$ für $n + 1$ erfüllt. Wir zeigen, dass die Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge ist. Es gilt

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \begin{cases} \dfrac{\alpha_n + \beta_n}{2} - \alpha_n = \dfrac{\beta_n - \alpha_n}{2} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}} & , f\left(\dfrac{\alpha_n + \beta_n}{2}\right) \leq 0 \\ 0 & \text{, anderfalls.} \end{cases}$$

Also gilt

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = |\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}},$$

Für $n \geq m$ gilt

$$|\alpha_n - \alpha_m| = |(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}) + \ldots + (\alpha_{m+1} - \alpha_m)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\alpha_n - \alpha_{n-1}| + |\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}| + \ldots + |\alpha_{m+1} - \alpha_m| \\
&\leq \frac{b-a}{2^n} + \frac{b-a}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{b-a}{2^m} \\
&= (b-a)\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right) \\
&= (b-a)\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{2^k} \\
&= (b-a)\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{2^k}\right| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

füe jedes $n \geq m \geq C_\varepsilon^\beta$, wobei nach dem Cauchuschen-Konvergenz-Kriterium für die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

gibt es $C_\varepsilon^\beta \in \mathbb{N}$, sodass gilt

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{2^k}\right| < \varepsilon,$$

für jedes $n \geq m \geq C_\varepsilon^\beta$. Die Folge $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch eine Cauchy Folge, weil

$$\begin{aligned}
|\beta_n - \beta_m| &= |\beta_n - \alpha_n + \alpha_n - \alpha_m + \alpha_m - \beta_m| \\
&\leq |\beta_n - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha_m| + |\alpha_m - \beta_m| \\
&= \frac{b-a}{2^n} + |\alpha_n - \alpha_m| + \frac{b-a}{2^m}.
\end{aligned}$$

Nach dem Vollständigkeitsaxiom gibt es $x, y \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_n \xrightarrow{n} x$ und $\beta_n \xrightarrow{n} y$. Weil

$$\begin{aligned}
y - x &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \beta_n - \lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \big(\beta_n - \alpha_n\big) \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{b-a}{2^n}, \\
&= 0
\end{aligned}$$

gilt $x = y$. Weil $[a, b]$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, gilt $x \in [a, b]$ (wenn $x > b$ oder $x < a$, dann kann weder $\alpha_n \xrightarrow{n} x$ noch $\beta_n \xrightarrow{n} x$). Aufgrund der Stetigkeit von f ist

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(\beta_n) = f(x).$$

Aus Satz 1.5.8 folgt

$$f(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(\alpha_n) \leq 0,$$

und

$$f(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(\beta_n) \geq 0.$$

Also gilt $f(x) = 0$. □

COROLLAR 2.4.2. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion in $[a, b]$. Sei $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < c < f(b)$. Dann existiert $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = c$.*

BEWEIS. Sei die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = f(x) - c,$$

für alle $x \in [a, b]$. Dann ist g stetig in $[a, b]$ mit $g(a) = f(a) - c < 0$ und $g(b) = f(b) - c > 0$. Nach Satz 2.4.1 existiert daher ein $x_0 \in [a, b]$ mit

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - c = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = c.$$ □

COROLLAR 2.4.3. *Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion ungeraden Grades d.h. es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n} x^{2n} + x^{2n+1},$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $p(x_0) = 0$.

BEWEIS. Sei $x \neq 0$. Es gilt

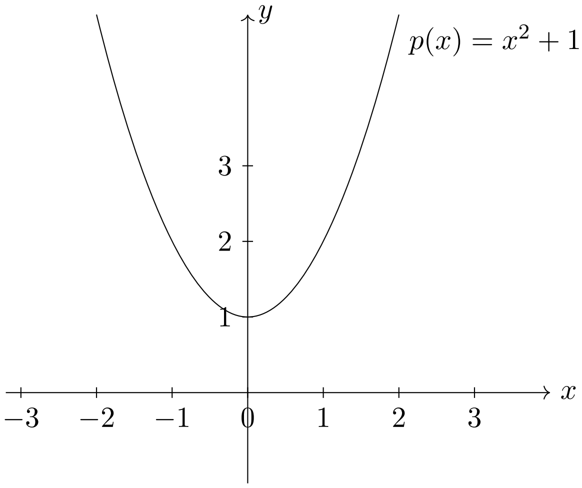
$$p(x) = x^{2n+1} \left(\frac{a_0}{x^{2n+1}} + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_2}{x^{2n-1}} + \ldots + \frac{a_{2n}}{x} + 1 \right).$$

Also gilt

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} p(x) = +\infty \quad \& \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} p(x) = -\infty.$$

Man kann also Stellen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$ finden mit $p(a) < 0 < p(b)$. Deshalb gibt es ein $x_0 \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $p(x_0) = 0$. □

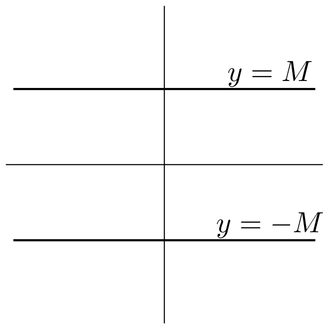
Bemerkung. Eine Polynomfunktion geraden Grades braucht keine reelle Nullstelle zu besitzen, wie das Beispiel $p(x) = x^2 + 1$ zeigt.



DEFINITION 2.4.4. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn ein $M > 0$ existiert, sodass gilt

$$\forall_{x \in D}\big(|f(x)| \leq M\big).$$

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funtion mit $|f(x)| \leq M$, für alle $x \in D$. Dann ist der Graph von f zwischen den horizontalen Linien $y = M$ und $y = -M$.



Die stetige Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $p(x) = x^2 + 1$, für alle $x \in \mathbb{R}$, ist unbeschränkt.

THEOREM 2.4.5. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion in $[a, b]$. Dann existieren $x_0, x_1 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = m$, $f(x_1) = M$ und*

$$\forall_{x \in [a,b]}\big(m \leq f(x) \leq M\big).$$

BEWEIS. Siehe [**1**], p. 110. ☐

2.5. Elementare Funktionen

Satz 2.5.1. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponentialreihe*

$$\begin{aligned}\exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ &= \frac{1}{1} + \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots\end{aligned}$$

absolut konvergent.

Beweis. Wenn $x = 0$, dann gilt

$$\exp(0) = 1 + 0 + \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{6} + \frac{0^4}{24} + \dots = 1.$$

Sei $x \neq 0$. Die Behauptung folgt aus dem Quotienten-Kriterium (Satz 1.8.7). Mit

$$\alpha_n = \frac{x^n}{n!}, \qquad \alpha_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^n x}{n!(n+1)}$$

gilt für alle $x \neq 0$ und $n \geq 2|x|$

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \left|\frac{x^n x n!}{x^n n!(n+1)}\right| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

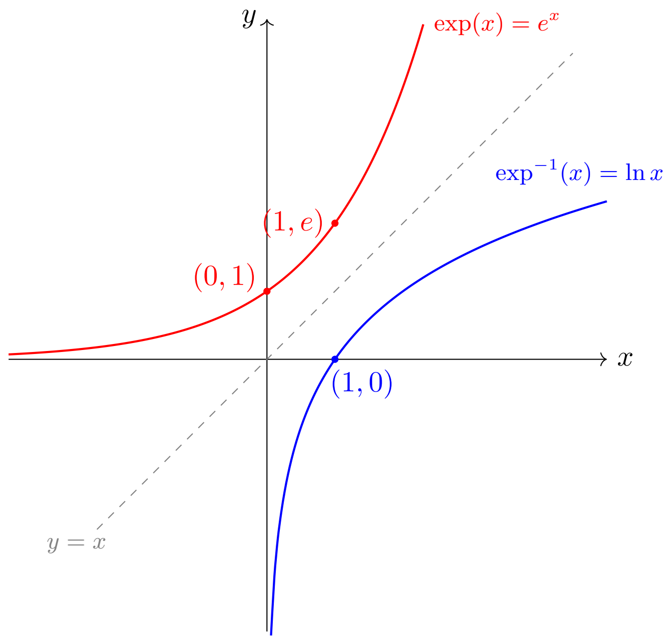
□

Definition 2.5.2. Mit der Exponentialreihe definiert man die berühmte Eulersche Zahl

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots.$$

und die *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = e^x$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von $\exp(x)$ ist die folgende rote Kurve:



Satz 2.5.3. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

(ii) $\exp(x) > 0$.

(iii) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

(iv) $\exp(n) = e^n$, *für jedes* $n \in \mathbb{N}$.

(v) $\exp(k) = e^k$, *für jedes* $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Aufgabe. □

Die Formel (v) des Satzes 2.5.3 motiviert die Bezeichnung Exponentialfunktion. Man kann sagen, dass $\exp(x)$ die Potenzen e^k, $k \in \mathbb{Z}$, interpoliert und so auf nicht-ganze Exponenten ausdehnt. Man schreibt deshalb auch suggestiv e^x für $\exp(x)$. Die Exponentialfunktion exp ist stetig und streng monoton wachsend, d.h.

$$x < x' \Rightarrow \exp(x) < \exp(x'),$$

und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}^{+*} = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ ab. Aus $x < x' \Rightarrow \exp(x) < \exp(x')$ folgt $\exp(x) = \exp(x') \Rightarrow x = y$, für jedes $x, x' \in \mathbb{R}$.

Definition 2.5.4. Die Umkehrfunktion

$$\ln : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \ln(x)$$

heist *natürlicher Logarithmus.*

Die Funktion ln ist stetig. Es gelten

$$e^x = y \Leftrightarrow \ln(y) = x,$$

$$\exp(\ln(y)) = e^{\ln(y)} = y,$$

$$\ln(\exp(x)) = \ln e^x = x,$$

$$y < y' \Rightarrow \ln(y) < \ln(y').$$

Aus $y < y' \Rightarrow \ln(y) < \ln(y')$ folgt $\ln(y) = \ln(y') \Rightarrow y = y'$, für jedes $y, y' \in \mathbb{R}^+$. Es gilt auch die Funktionalgleichung

$$\ln(y \cdot y') = \ln(y) + \ln(y'),$$

für alle $y, y' \in \mathbb{R}^{+*}$. Statt $\ln(x)$ ist auch die Bezeichnung $\log(x)$ gebräuchlich.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ sind die unendliche Reihen

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots,$$

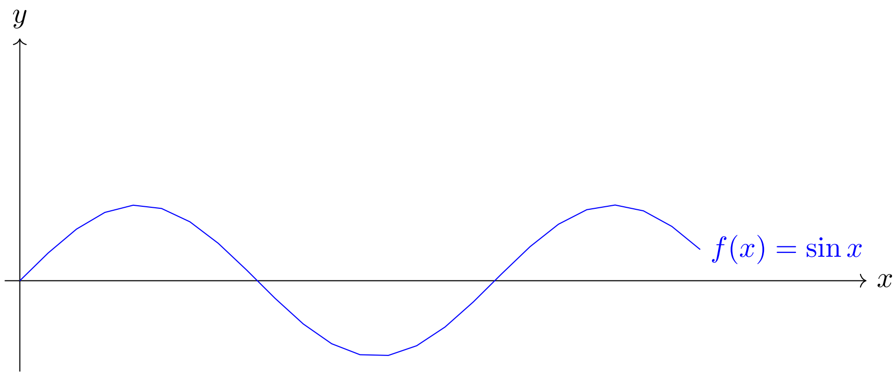
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots$$

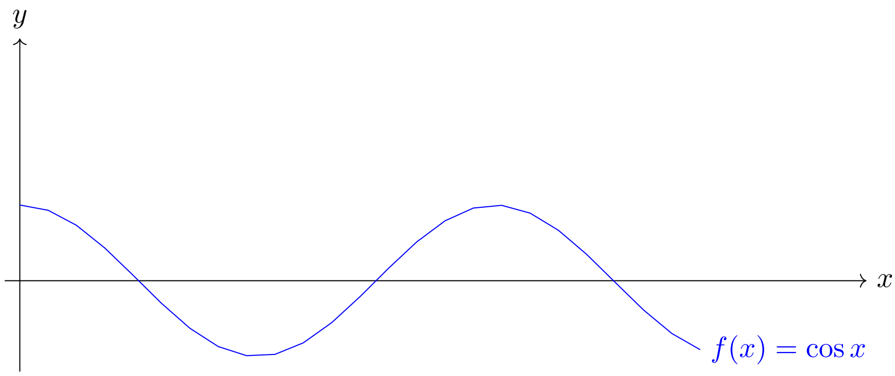
absolut konvergent. Die absolute Konvergenz folgt unmittelbar aus der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| &= \sum_{n=0}^{\infty} |(-1)^n| \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Definition 2.5.5. Seien die trigonometrische Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $x \mapsto \sin(x)$, und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $x \mapsto \cos(x)$, für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Die Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.





Die Zahl $\frac{\pi}{2}$ ist die eindeutig bestimmte Nullstelle der Funktion cos im Intervall $[0, 2]$ (siehe [**1**], pp. 142-143). Es gilt

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1.$$

DEFINITION 2.5.6. Die *Tangensfunktion* ist für

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

definiert durch

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Die *Cotangensfunktion* ist für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definiert durch

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Es gilt $\cot(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

KAPITEL 3

Differentiation

3.1. Differenzierbare Funktionen

DEFINITION 3.1.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt *in einem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

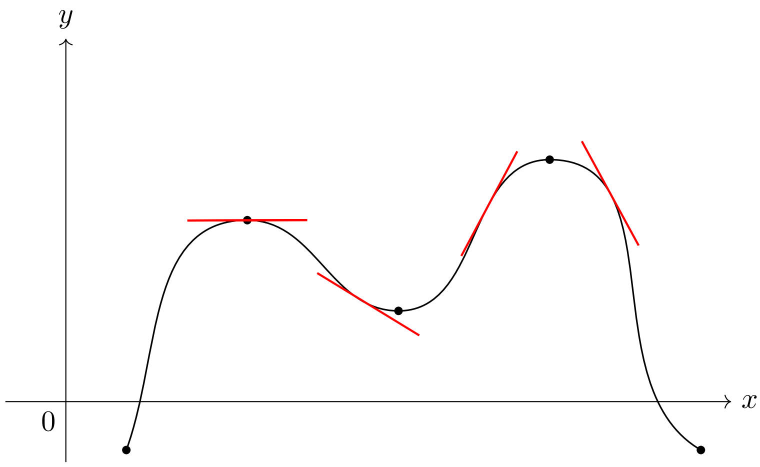
existiert. Dabei sind bei der Limesbildung nur solche Folgen $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit
(i) $\lim_{n \longrightarrow \infty} h_n = 0$,
(ii) $h_n \neq 0$, für jedes $n \in \mathbb{N}$,
(iii) $x_0 + h_n \in D$, für jedes $n \in \mathbb{N}$.
Der Grenzwert $f'(x_0)$ heißt *Ableitung* von f im Punkt x_0. Die Funktion f heist *differenzierbar in D*, falls f in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist. Man schreibt auch

$$\frac{df(x_0)}{dx}, \text{ oder } \frac{df}{dx}(x_0) \quad \text{für } f'(x_0).$$

Der Differenzquotient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ist die Steigung der Sekante des Graphen von f durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.



Beim Grenzübergang $h \longrightarrow 0 \Rightarrow x_0 + h \longrightarrow x_0$, geht die Sekante in die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ über.

Beispiel 3.1.2. Für eine konstante Funktion $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = c$, für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $c \in \mathbb{R}$, gilt

$$f_c{}'(x_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f_c(x_0 + h) - f_c(x_0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} 0 = 0.$$

Beispiel 3.1.3. Für die identische Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) = x$, für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}}{}'(x_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x_0 + h) - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x_0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} 1 = 1.$$

Beispiel 3.1.4. Für die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \lambda x$, für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$g'(x_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\lambda(x_0 + h) - \lambda x_0}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\lambda x_0 + \lambda h - \lambda x_0}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \lambda = \lambda.$$

Beispiel 3.1.5. Für die Funktion $\mathtt{sq} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathtt{sq}(x) = x^2$, für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt

$$\begin{aligned} \mathtt{sq}'(x_0) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\mathtt{sq}(x_0 + h) - \mathtt{sq}(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{h(2x_0 + h)}{h} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} (2x_0 + h) \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} 2x_0 + \lim_{h\longrightarrow 0} h \\
&= 2x_0 + 0 \\
&= 2x_0.
\end{aligned}$$

Beispiel 3.1.6. Für die Funktion $\texttt{inv} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\texttt{inv}(x) = \frac{1}{x},$$

für alle $x \in \mathbb{R}^*$, gilt

$$\begin{aligned}
\texttt{inv}'(x_0) &= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\texttt{inv}(x_0 + h) - \texttt{inv}(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\frac{x_0-x_0-h}{(x_0+h)x_0}}{h} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{-h}{h \cdot x_0(x_0 + h)} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + h)} \\
&= -\frac{1}{\lim_{h\longrightarrow 0} x_0(x_0 + h)} \\
&= -\frac{1}{\lim_{h\longrightarrow 0}(x_0^2 + x_0h)} \\
&= -\frac{1}{\lim_{h\longrightarrow 0} x_0^2 + \lim_{h\longrightarrow 0} x_0h} \\
&= -\frac{1}{x_0^2 + 0} \\
&= -\frac{1}{x_0^2}.
\end{aligned}$$

Beispiel 3.1.7. Für die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\exp'(x_0) = \exp(x_0),$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ (Aufgabe).

Beispiel 3.1.8. Für die Funktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\sin'(x_0) = \cos(x_0),$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

Beispiel 3.1.9. Für die Funktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\cos'(x_0) = -\sin(x_0),$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

Beispiel 3.1.10. Die Betragsfunktion $|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei $|.|(x) = |x|$, für alle $x \in \mathbb{R}$, ist nicht differenzierbar im Punkt $x_0 = 0$. Angenommen

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{|x_0 + h| - |x_0|}{h} = l \in \mathbb{R}.$$

Seien die Folgen reeller Zahlen

$$\alpha_n = \frac{1}{n+1}, \quad \beta_n = -\frac{1}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\left|0 + \frac{1}{n+1}\right| - |0|}{\frac{1}{n+1}} \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{|0 + \alpha_n| - |\alpha_n|}{\alpha_n} \\
&= l \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{|0 + \beta_n| - |\beta_n|}{\beta_n} \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\left|0 - \frac{1}{n+1}\right| - |0|}{-\frac{1}{n+1}} \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} -\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} \\
&= -1,
\end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist.

Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar, so ist sie in x_0 auch stetig d.h.

$$\lim_{h \longrightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

weil für $h \neq 0$ gilt:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right] h.$$

3.2. Differentiations-Regeln

SATZ 3.2.1. *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen*

$$f + g, \lambda f, f \cdot g : D \to \mathbb{R}$$

in x_0 differenzierbar und es gelten die Rechenregeln:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$
$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0),$$
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$$

in x_0 differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

BEWEIS. Wir benutzen die fogende Gleichungen:

$$\frac{(f + g)(x_0 + h) - (f + g)(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h},$$

$$\frac{(\lambda f)(x_0 + h) - (\lambda f)(x_0)}{h} = \lambda \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{(fg)(x_0 + h) - (fg)(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0 + h) + f(x_0)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \end{aligned}$$

$$= \frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]g(x_0+h)+f(x_0)[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h}$$
$$= \left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right]g(x_0+h)+f(x_0)\left[\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right].$$

Sei $f(x)=1$, für alle $x \in D$. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{g(x_0+h)}-\frac{1}{g(x_0)}}{h} &= \frac{1}{h}\frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{g(x_0)g(x_0+h)}\\ &= -\frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)}\left[\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right],\end{aligned}$$

also gilt

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Der allgemeine Fall folgt hieraus mithilfe der Produktregel:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0)\\ &= f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)}+f(x_0)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)\\ &= f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)}+f(x_0)\cdot\frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}\\ &= \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}.\end{aligned}$$

□

Beispiel 3.2.2. Sei $n \in \mathbb{N}^+$. Für die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = x^n,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt

$$f_n{}'(x_0) = nx_0^{n-1},$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei $n=1$. Es gilt

$$f_1{}'(x_0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}{}'(x_0) = 1 = 1f_1(x_0)^{1-1}.$$

Induktionsschritt: Da

$$f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n x = f_n(x)\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x),$$

folgt aus der Produktregel

$$\begin{aligned}
{f_{n+1}}'(x_0) &= \big(f_n \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\big)'(x_0)\\
&= {f_n}'(x_0)\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x_0) + f_n(x_0){\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}'(x_0)\\
&= {f_n}'(x_0)x_0 + f_n(x_0)1\\
&\overset{(I.V.)}{=} nx_0^{n-1}x_0 + x_0^n\\
&= nx_0^n + x_0^n\\
&= (n+1)x_0^n.
\end{aligned}$$

Definition 3.2.3. Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion in D. Die erste Ableitung von f ist die Funktion $f'\colon D \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$D \ni x_0 \mapsto f'(x_0); \qquad x_0 \in D.$$

Wenn f' differenzierbar im Punkt $x_0 \in D$ ist, dann heißt der Grenzwert $(f')'(x_0)$ die zweite Ableitung von f im Punkt x_0. Man schreibt auch

$$f''(x_0),\ \text{oder}\ \frac{d^2f(x_0)}{dx^2},\ \text{oder}\ \frac{d^2f}{dx^2}(x_0).$$

Auf ähnliche Art definieren wir die n-te Ableitung $f^{(n)}(x_0)$ von f im Punkt x_0, für jedes $n \in \mathbb{N}^+$. Für $n = 0$ definieren wir $f^{(0)} = f$.

Corollar 3.2.4. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-te differenzierbare Funktionen im Punkt $x_0 \in D$, und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen*

$$f + g, \lambda f, f \cdot g : D \to \mathbb{R}$$

im Punkt x_0 n-te differenzierbar und es gelten die Rechenregeln:

$$(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0),$$

$$(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0),$$

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^{(k)}(x_0).$$

Beweis. Aufgabe. □

3.3. Die Kettenregel

Satz 3.3.1 (Ableitung der Umkehrfunktion). *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-triviales (d.h. ein aus mehr als einem Punkt bestehended)Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion und $g = f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion.*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f = \mathrm{id}_D"'] & f(D) \arrow[r, "g"] & D. \end{tikzcd}$$

Ist f im Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, so ist g im Punkt $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Beweis. Sei $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f(D) \setminus \{y_0\}$ mit $\beta_n \xrightarrow{n} y_0$. Wenn $\alpha_n = g(\beta_n)$, für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\alpha_n \xrightarrow{n} x_0$, weil g stetig im Punkt y_0 ist. Da g eine Injektion ist, gilt $\beta_n \neq y_0 \Rightarrow \alpha_n \neq x_0$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt

$$\begin{aligned} g'(y_0) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{g(\beta_n) - g(y_0)}{\beta_n - y_0} \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\alpha_n - x_0}{f(\alpha_n) - f(x_0)} \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n - x_0}} \\ &= \frac{1}{\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n - x_0}} \\ &= \frac{1}{f'(x_0)}, \end{aligned}$$

weil

$$f'(x_0) = \lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad \square$$

Beispiel 3.3.2. Die Funktion $\ln : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, wobei $x \mapsto \ln(x)$, ist die Umkehrfunction von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Daher gilt nach dem vorgehenden Satz

$$\ln'(y_0) = \frac{1}{\exp'(\ln(y_0))} = \frac{1}{\exp(\ln(y_0))} = \frac{1}{y_0}.$$

Satz 3.3.3 (Kettenregel). *Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(D) \subseteq E \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

Die Funktion f sei im Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar und g sei in $y_0 = f(x_0) \in E$ differenzierbar. Dann ist die Funktion $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis. Sei die Funktion $h : E \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(e) = \begin{cases} \frac{g(e)-g(y_0)}{e-y_0} & , e \neq y_0 \\ \\ g'(y_0) & , e = y_0. \end{cases}$$

Da g differenzierbar im Punkt y_0 ist, gilt

$$\lim_{e \longrightarrow y_0} h(e) = g'(y_0) = h(y_0)$$

d.h. h ist stetig im Punkt y_0. Darüber hinaus

$$\forall_{e \in E} \big(g(e) - g(y_0) = h(e)(e - y_0) \big).$$

Wenn $e \neq y_0$, nutzen wir die Definition von $h(e)$. Wenn $e = y_0$, dann $\forall_{e \in E} \big(0 = 0 \big)$. Also gilt

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{h(f(x)) \big[f(x) - f(x_0) \big]}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \longrightarrow x_0} h(f(x)) \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= h(f(x_0)) g'(x_0) \\ &= h(y_0) g'(x_0) \\ &= g'(f(x_0)) g'(x_0). \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.3.4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = f(2019x + 2020),$$

füe alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$g'(x_0) = 2019 f'(2019x_0 + 2020).$$

Beispiel 3.3.5. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = \sin^2(x),$$

füe alle $x \in \mathbb{R}$. D.h. $h = \mathtt{sq} \circ \sin$. Dann gilt

$$g'(x_0) = 2\sin(x_0)\sin'(x_0) = 2\sin(x_0)\cos(x_0).$$

Beispiel 3.3.6. Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x) = \cos^2(x),$$

füe alle $x \in \mathbb{R}$. D.h. $h = \mathtt{sq} \circ \cos$. Dann gilt

$$h'(x_0) = 2\cos(x_0)\cos'(x_0) = 2\cos(x_0)[-\sin(x_0)] = -2\sin(x_0)\cos(x_0).$$

Beispiel 3.3.7. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x^a,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt (Aufgabe)

$$f'(x_0) = a x_0^{a-1},$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$.

Corollar 3.3.8. *Seien $f : C \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, und $h : E \to \mathbb{R}$ mit $f(C) \subseteq D$ und $F(D) \subseteq E$*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend right, "h \circ g \circ f"'] & f(C) \subseteq D \arrow[r, "g"] & g(D) \subseteq E \arrow[r, "h"] & \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

Sei f im Punkt $x_0 \in C$ differenzierbar, sei g im Punkt $y_0 = f(x_0) \in D$ differenzierbar, und sei h im Punkt $z_0 = g(y_0) \in E$ differenzierbar. Dann ist die Funktion $h \circ g \circ f \colon C \to \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt x_0 mit

$$(h \circ g \circ f)'(x_0) = h'(g(f(x_0))) \cdot g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis. Aufgabe. $\square$

3.4. Der Mittelwertsatz

DEFINITION 3.4.1. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ hat ein *lokales Maximum* im Punkt $\xi \in [a,b]$, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$\forall_{x\in[a,b]}\big(|x-\xi| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq f(\xi)\big),$$

Eine Funktion $f\colon [a,b]$ hat ein *lokales Minimum* im Punk $\xi \in [a,b]$, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$\forall_{x\in[a,b]}\big(|x-\xi| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(\xi)\big).$$

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ hat ein *lokales Extremum* im Punkt $\xi \in [a,b]$ wenn f ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum im Punkto ξ hat.

Eine konstante Funktion hat eine (lokales) Maximum [und eine (lokales) Minimum] in jedem Punkt ihrer Definitionsbereich. Offensichtlich muss ein lokales Minimum (Maximum) nicht zwingend ein globales Minimum (Maximum) sein.

SATZ 3.4.2. *Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\xi \in [a,b]$, Wenn f ein lokales Extremum im Punkt ξ hat und wenn f differentzierbar im Punkt ξ ist, dann gilt $f'(\xi) = 0$.*

BEWEIS. Angenommen f hat ein lokales Maximum im Punkt ξ. Seien $\varepsilon > 0$ mit $f(x) \leq f(\xi)$, für alle $x \in [a,b]$ mit $|x-\xi| < \varepsilon$. Es gilt

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \\ &= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = f'_+(\xi) \\ &= \lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = f'_-\xi). \end{aligned}$$

Für ein genügend kleines h gilt $f(\xi+h)-f(\xi) \leq 0$. Wenn $h > 0$, dann gilt

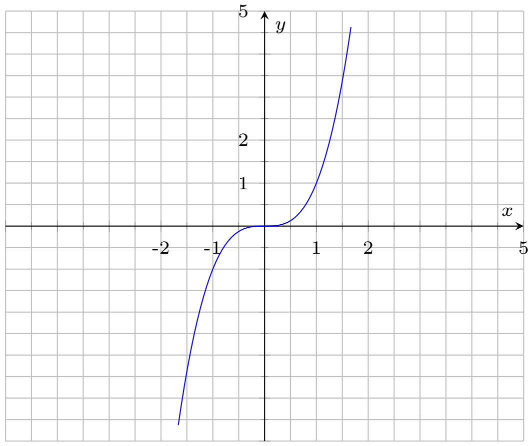
$$\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \leq 0 \quad \& \quad f'_+(\xi) \leq 0.$$

Wenn $h < 0$, dann gilt

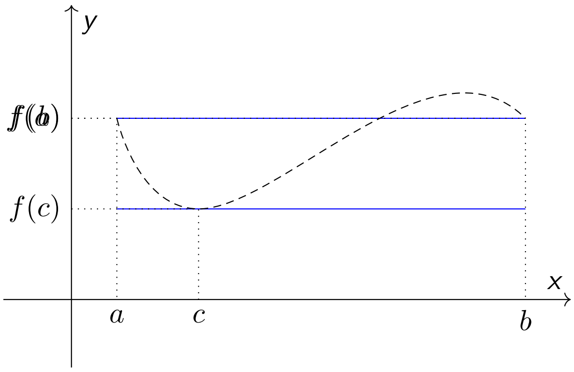
$$\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \geq 0 \quad \& \quad f'_-(\xi) \geq 0.$$

Also gilt $0 \leq f'(\xi) \leq 0$ d.h. $f'(\xi) = 0$. □

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = x^3$, für alle $x \in \mathbb{R}$, hat kein lokales Extremum im Punkt $\xi = 0$, obwohl $f'(0) = 0$ gilt.



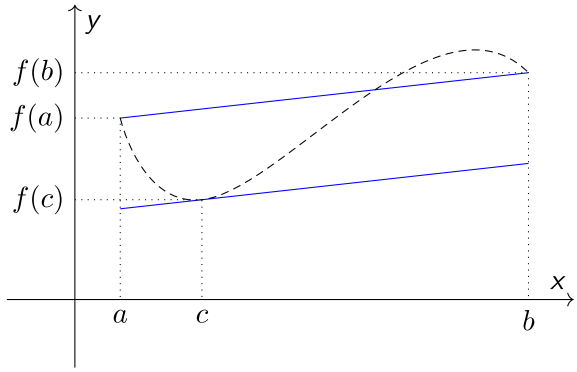
Satz 3.4.3 (Satz von Rolle). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Wenn f differenzierbar in (a, b) ist, dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.*



Beweis. Wenn f eine konstante Funktion ist, dann gilt $f'(c) = 0$, für alle $c \in (a, b)$. Wenn f keine konstante Funktion ist, dann gibt es $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) > f(a)$ oder $f(x_0) < f(a)$. Sei $f(x_0) > f(a)$. Weil f eine stetige Funktion in $[a, b]$ ist, hat f ein globales Maximum im Punkt $\xi \in [a, b]$ (Theorem 2.4.5). Weil $x_0 \in (a, b)$, gilt $\xi \in (a, b)$ auch. Aus Satz 3.4.2 folgt $f'(\xi) = 0$. Wenn $f(x_0) < f(a)$, arbeiten wir ähnlich. $\square$

Corollar 3.4.4 (Mittelwertsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wenn f differenzierbar in (a, b) ist,* *dann gibt es ein* $c \in (a, b)$ *mit*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Beweis. Sei die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a),$$

für alle $x \in [a, b]$. Offensichtlich, ist F eine stetige Funktion in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b). Es gilt

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

für alle $x \in (a, b)$. Darüber hinaus es gilt $F(a) = f(a) = F(b)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $F'(c) = 0$, und

$$F'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \square$$

Geometrische Bedeutung des Mitelwertsatzes: Es gibt ein Punkt $(c, f(c))$ des Graphes von f sodasss gilt: die Tangente der Kurve von f im Punkt $(c, f(c))$ parallel zu dem Segment zwischen $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

Corollar 3.4.5. *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *und seien* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zwei stetige Funktionen, die in* (a, b) *differenzierbar sind. Dann gibt es ein* $\xi \in (a, b)$, *so dass*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Beweis. Aufgabe. $\square$

COROLLAR 3.4.6. *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *und sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktionen, die in* (a, b) *differenzierbar ist. Seien* $m, M \in \mathbb{R}$ *mit*

$$m \leq f'(x) \leq M,$$

für alle $x \in (a, b)$. *Dann gilt*

$$m(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq M(x_2 - x_1),$$

für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ *mit* $x_1 \leq x_2$.

BEWEIS. Aufgabe. □

COROLLAR 3.4.7. *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *und sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktionen, die in* (a, b) *differenzierbar ist. Wenn* $f'(x) = 0$, *für alle* $x \in (a, b)$, *gilt, dann ist* f *eine konstante Funktion in* $[a, b]$.

BEWEIS. Aufgabe. □

KAPITEL 4

Integration

4.1. Treppenfunktionen

DEFINITION 4.1.1. Eine Funktion $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, wobei $a < b$, heißt *Treppenfunktion*, falls es eine *Unterteilung*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

des Intervalls $[a,b]$ gibt, so dass ϕ auf jedem offenen Teilintervall (x_{i-1}, x_i), wobei $i \in \{1, \ldots, n\}$, konstant ist. Sei $\phi(x) := c_i$, für alle $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Die Werte von ϕ in den Teilpunkten $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sind beliebig. Sei $\mathcal{T}[a,b]$ die Menge aller Treppenfunktionen $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Das *Integral* $\int_a^b \phi(x)dx$ einer Treppenfunktion $\phi \in \mathcal{T}[a,b]$ ist definiert durch

$$\int_a^b \phi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}).$$

Das Integral $\int_a^b \phi(x)dx$ kann man als die zwischen der x-Achse und dem Graphen von ϕ leigende Fläche deuten (falls ϕ auf einigen Teilintervallen negativ ist, sind die entsprechenden Flächen negativ in Ansatz zu bringen).

SATZ 4.1.2. *Das Integral $\int_a^b \phi(x)dx$ von $\phi \in \mathcal{T}[a,b]$ ist unabhängig von der Unterteilung von $[a,b]$.*

BEWEIS. Seien die Unteteilungen von $[a,b]$:

$$(P): \qquad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$(Q): \qquad a = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = b,$$

und seien

$$\phi(x) = c_i, \qquad x \in (x_{i-1}, x_i), \qquad i \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\phi(y) = d_j, \qquad y \in (y_{j-1}, y_j), \qquad j \in \{1, \ldots, m\}.$$

es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) := \int_P \phi(x)dx = \int_Q \phi(y)dy := \sum_{j=1}^{m} d_j(y_j - y_{j-1}).$$

Sei

$$P \leq Q :\Leftrightarrow \forall_{i \in \{1,\ldots,n\}} \exists_{k:\{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,m\}} \big(x_i = y_{k_i}\big).$$

Also gilt

$$x_{i-1} = y_{k_{i-1}} < y_{k_{i-1}+1} < \ldots < y_{k_i} = x_i,$$

und

$$d_j = c_i, \quad \text{für jedes } j \text{ mit } k_{i-1} < j < k_i.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_Q \phi(y)dy &= \sum_{j=1}^{m} d_j(y_j - y_{j-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} c_i(y_j - y_{j-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \int_P \phi(x)dx.
\end{aligned}$$

Seien P, Q beliebige Unterteilungen von $[a, b]$. Dann ist $P \cup Q$ eine Unterteilung von $[a, b]$ mit

$$P \leq P \cup Q \ \ \& \ \ Q \leq P \cup Q.$$

Es gelten

$$\int_{P\cup Q} \phi(z)dz = \int_P \phi(x)dx \ \ \& \ \ \int_{P\cup Q} \phi(z)dz = \int_Q \phi(x)dx,$$

also gilt $\int_P \phi(x)dx = \int_Q \phi(y)dy$. □

Sei die Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 = b$$

des Intervalls $[a, b]$. Eine Konstante Funtion $\phi_c : [a, b] \to \mathbb{R}$, wobei $\phi_c(x) = c$, für alle $x \in [a, b]$, ist eine Treppenfunktion mit

$$\int_a^b \phi_c(x)dx = \sum_{i=1}^{1} c(x_1 - x_0) = c(b - a).$$

Satz 4.1.3. *Seien* $\phi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*
(i) $\phi + \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ *und*

$$\int_a^b \big(\phi + \psi\big)(x)dx = \int_a^b \phi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx.$$

(ii) $\lambda\phi \in \mathcal{T}[a,b]$ *und*

$$\int_a^b \big(\lambda\phi\big)(x)dx = \lambda \int_a^b \phi(x)dx.$$

(iii)

$$\phi \leq \psi \Rightarrow \int_a^b \phi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx,$$

wobei

$$\phi \leq \psi :\Leftrightarrow \forall_{x\in[a,b]}\big(\phi(x) \leq \psi(x)\big).$$

Beweis. Aufgabe □

Definition 4.1.4. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion d.h. es gibt $m, M \in \mathbb{R}$ mit

$$m \leq f(x) \leq M, \qquad x \in [a,b].$$

Sei $\phi_m \in \mathcal{T}[a,b]$ die konstante Funktion m auf $[a,b]$ und sei $\phi_M \in \mathcal{T}[a,b]$ die konstante Funktion M auf $[a,b]$. Es gilt

$$\phi_m \leq f \leq \phi_M.$$

Seien die Menge

$$A(f) = \left\{ \int_a^b \phi(x)dx \mid \phi \in \mathcal{T}[a,b] \ \& \ \phi \geq f \right\},$$

$$B(f) = \left\{ \int_a^b \phi(x)dx \mid \phi \in \mathcal{T}[a,b] \ \& \ \phi \leq f \right\}.$$

$A(f)$ ist eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$; da $\phi_M \in \mathcal{T}[a,b]$ und $\phi_M \geq f$,

$$M(b-a) = \int_a^b \phi_M(x)dx \in A(f).$$

$A(f)$ ist eine nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$; für alle $\int_a^b \phi(x)dx \in A(f)$ gilt

$$\phi \geq f \geq \phi_m \Rightarrow \int_a^b \phi(x)dx \geq \int_a^b \phi_m(x)dx = m(b-a).$$

$B(f)$ ist eine nichtleere und nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$: für alle $\int_a^b \phi(x)dx \in B(f)$ gilt

$$\phi \leq f \leq \phi_M \Rightarrow \int_a^b \phi(x)dx \leq \int_a^b \phi_M(x)dx = M(b-a).$$

4.2. Das Oberintegral und das Unterintegral

Definition 4.2.1 (Supremum, Infimum). Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* (bzw. *Infimum*) von A, falls s kleinste obere (bzw. gröste untere) Schranke von A ist. Dabei heißt s *kleinste obere Schranke* von A, falls gilt:

(i) s ist eine obere Schranke von A $(a \in A \Rightarrow a \leq s)$.

(ii) Ist s' eine weitere obere Schranke von A, so folgt $s \leq s'$.

Dabei heißt t *gröste untere Schranke* von A, falls gilt:

(i) t ist eine untere Schranke von A $(a \in A \Rightarrow a \geq t)$.

(ii) Ist t' eine weitere untere Schranke von A, so folgt $t' \leq t$.

Es ist klar, dass die kleinste obere Schranke (bzw. gröste untere Schranke) im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist. Man bezeichnet sie mit

$$\sup(A) \quad [\text{bzw. } \inf(A)].$$

Zum Beispiel

$$\sup(0,1) = 1 \;\; \& \;\; \inf(0,1) = 0.$$

Theorem 4.2.2. *Jede nichtleere, nach oben* (*bzw. unten*) *beschränkte Teilmenge* $A \subseteq \mathbb{R}$ *besitzt ein Supremum* (*bzw. Infimum*).

Beweis. Mithilfe des Vollstandigkeitsaxioms (siehe [**1**], S. 89). □

Definition 4.2.3 (Oberintegral, Unterintegral). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion. Dann setzt man

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf A(f) = \inf \left\{ \int_a^b \phi(x)dx \mid \phi \in \mathcal{T}[a,b] \;\&\; \phi \geq f \right\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup B(f) = \sup \left\{ \int_a^b \phi(x)dx \mid \phi \in \mathcal{T}[a,b] \;\&\; \phi \leq f \right\}.$$

Für jede Treppenfunktion $\phi \in \mathcal{T}[a,b]$ gilt (Aufgabe)

$$\overline{\int_a^b} \phi(x)dx = \underline{\int_a^b} \phi(x)dx = \int_a^b \phi(x)dx.$$

Sei die Dirichlet-Funktion $\texttt{Dir} : [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\texttt{Dir}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & , x \in \mathbb{I} \cap [0,1], \end{cases}$$

Es gilt $\phi_1 \in A(\texttt{Dir})$ und $\phi \in A(\texttt{Dir}) \Rightarrow \phi \geq \phi_1$. Es folgt

$$\overline{\int_0^1} \texttt{Dir}(x)dx = \int_0^1 \phi_1(x)dx = 1(1-0) = 1.$$

Es gilt $\phi_0 \in B(\texttt{Dir})$ und $\phi \in B(\texttt{Dir}) \Rightarrow \phi \leq \phi_0$. Es folgt

$$\underline{\int_0^1} \texttt{Dir}(x)dx = \int_0^1 \phi_0(x)dx = 0(1-0) = 0$$

d.h.

$$\overline{\int_0^1} \texttt{Dir}(x)dx \neq \underline{\int_0^1} \texttt{Dir}(x)dx.$$

4.3. Das Riemannsche Integral

Definition 4.3.1. Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, wenn

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

In diesem Fall setzt man

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Jede Treppenfunktion ist Riemann-integrierbar, aber die Dirichlet-Funktion ist nicht.

Satz 4.3.2. *Es gelten:*

(*i*) *Jede stetige Funktion* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist Riemann-integrierbar.*

(*ii*) *Jede monotone Funktion* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. Siehe [**1**], S. 198. $\square$

Satz 4.3.3. *Seien* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbare Funktionen und* $\lambda \in \mathbb{R}$.
(*i*) *Die Funktion* $f + g$ *ist integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b \big(f+g\big)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(*ii*) *Die Funktion* λf *ist integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b \big(\lambda f\big)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

(*iii*)
$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx,$$

wobei

$$f \leq g :\Leftrightarrow \forall_{x\in[a,b]}\big(f(x) \leq g(x)\big).$$

(*iv*) *Die Funktion* $|f|$ *ist integrierbar und es gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

(*v*) *Die Funktion* $f \cdot g$ *ist integrierbar.*

Beweis. Siehe [**1**], S. 199. □

Satz 4.3.4. *Sei* $a < b < c$ *und* $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ *eine Funktion.* f *ist genau dann integrierbar, wenn sowohl die Beschränkung* $f_{|[a,b]}$ *der Funktion* f *auf* $[a, b]$ *also auch die Beschränkung* $f_{|[b,c]}$ *der Funktion* f *auf* $[b, c]$ *integrierbar sind und es gilt dann*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Beweis. Siehe [**1**], S. 207. □

Definition 4.3.5. Seien $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Man setzt

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Sei f Riemann-integrierbar. Man setzt

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

4.4. Mittelwertsatz der Integralrechnung

SATZ 4.4.1 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Sei $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+$ eine nicht negative integrierbare Funktion. Dann gibt es zu jeder stetigen Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \phi(x)dx.$$

Wenn $\phi(x) = 1$, für jedes $x \in [a,b]$, dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

BEWEIS. Sei

$$M(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

der *Mittelwert* von f über dem Intervall $[a,b]$ und sei

$$M_\phi(f) = \frac{1}{\int_a^b \phi(x)dx}\int_a^b f(x)\phi(x)dx$$

der bezüglich ϕ *gewichtete Mittelwert* von f, falls

$$\int_a^b \phi(x)dx \neq 0.$$

Die Funktion $f \cdot \phi$ ist integrierbar als Produkt zwei integrierbare Funktionen (Satz 4.3.3(v)). Seien

$$m = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\},$$
$$M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

Dann gilt

$$m \cdot \phi \leq f \cdot \phi \leq M \cdot \phi,$$

also nach Satz 4.3.3(iii)

$$m\int_a^b \phi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\phi(x)dx \leq M\int_a^b \phi(x)dx.$$

Sei die stetige Funktion $g\colon [m,M] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(t) = t\int_a^b \phi(x)dx$$

für jedes $t \in [m, M]$. Es gilt

$$\phi \geq 0 \Rightarrow \int_a^b \phi(x)dx \geq 0,$$

also ist g streng monoton wachsend mit

$$g([m, M]) = [g(m), g(M)] \quad \& \quad \int_a^b f(x)\phi(x)dx \in [g(m), g(M)].$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\mu \in [m, M]$ mit

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = \mu \int_a^b \phi(x)dx = g(\mu).$$

Nach dem Zwischenwertsatz $\big(f[a, b]) = [m, M]\big)$ existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \mu$, also gilt

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = \mu \int_a^b \phi(x)dx = f(\xi) \int_a^b \phi(x)dx. \qquad \square$$

Geometrisch bedeutet der Mittelwersatz im Fall $\phi = \phi_1$ z.B. für eine positive Funktion f, dass die Fläche unter dem Graphen von f gleich der Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen $b - a$ und $f(\xi)$ ist. Für eine stetige Funktion $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist also der Mittelwert gleich dem Wert von f an einer gewissen Zwischenstelle $\xi \in [a, b]$:

$$M(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(\xi).$$

4.5. Integration und Differentiation

Satz 4.5.1. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $c \in [a, b]$. Für $x \in [a, b]$ sei*

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

Dann ist die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $F' = f$. Die Funktion F heißt das unbestimmte Integral von f.

Beweis. Sei $h > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_c^{x+h} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_c^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein $\xi_h \in [x, x+h]$ (bzw. $\xi_h \in [x+h, x]$, falls $h < 0$) mit

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi_h)(x+h-x) = f(\xi_h)h.$$

Da $h \to 0 \Rightarrow \xi_h \to x$ und f stetig ist, folgt

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(\xi_h)h \\ &= \lim_{h\to 0} f(\xi_h) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

□

Definition 4.5.2. Eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, falls $F' = f$.

Also das unbestimmte Integral eine Stammfunktion des Integranden ist.

Satz 4.5.3. *Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Eine weitere Funktion $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Stammfunktion von f, wenn $F - G$ eine Konstante ist.*

Beweis. (i) Sei $F - G = c$, wobei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $G' = (F-c)' = F' = f$. (ii) Sei G Stammfunktion von f, also $G' = f = F'$. Dann gilt $(F - G)' = 0$, daher ist $F - G$ konstant (Corollar 3.4.7). □

Theorem 4.5.4 (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Beweis. Für $x \in [a, b]$ sei

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Ist F eine beliebige Stammfunktion von f, so gibt es nach Satz 4.5.3 ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$F - G = c.$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned}F(b) - F(a) &= (G(b) + c) - (G(a) + c) \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt - 0 \\ &= \int_a^b f(t)dt.\end{aligned}$$

$\square$

Man setzt

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Die Formel von Theorem 4.5.4 schreibt sich dann als

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Beispiel 4.5.5.

$$\int_0^1 1dx = \int_0^1 (\mathrm{id}_{\mathbb{R}})'dx = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x)\Big|_0^1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(0) - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(1) = 1 - 0 = 1.$$

$$\int_0^1 xdx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2\right)'dx = \left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}0^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\int_0^1 x^2dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3\right)'dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 x^ndx = \int_0^1 \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'dx = \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{n+1}1^{n+1} - \frac{1}{n+1}0^{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

4.6. Die Substitutionsregel und partielle Integration

SATZ 4.6.1 (Substitutionsregel). *Sei* $f : [a', b'] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion und* $g : [a, b] \to [a', b']$ *eine stetig differenzierbare Funktion (d.h.* g' *eine stetige Funktion ist). Dann gilt*

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

BEWEIS. Sei $F : [a', b'] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Für die Funktion $F \circ g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt nach der Kettenregel

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Daraus folgt nach Theorem 4.5.4

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(t))g'(t)dt &= (F \circ g)(t)\Big|_a^b \\ &= (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.\end{aligned}$$ □

BEISPIEL 4.6.2. Seien $f(x) = \frac{1}{x}$, wobei $x \neq 0$, und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion in $[a, b]$ mit $g(t) \neq 0$, für jedes $t \in [a, b]$, und sei g' stetig in $[a, b]$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{g'(t)}{g(t)}dt &= \int_a^b f(g(t))g'(t)dt \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{x}dx \\ &= \ln\big(|x|\big)\Big|_{g(a)}^{g(b)} \\ &= \ln\big(|g(b)|\big) - \ln\big(|g(a)|\big).\end{aligned}$$

BEISPIEL 4.6.3. Für $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b f(t + c)dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx.$$

Sei $g(t) = t + c$. Es gilt $g'(t) = 1$ und

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t+c)dt &= \int_a^b f(g(t))g'(t)dt \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx \\ &= \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx.\end{aligned}$$

Beispiel 4.6.4. Für $c \neq 0$ gilt

$$\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)dx.$$

Sei $g(t) = ct$. Es gilt $g'(t) = c$ und

$$\begin{aligned}\int_a^b f(ct)dt &= \frac{1}{c}\int_a^b f(g(t))g'(t)dt \\ &= \frac{1}{c}\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx \\ &= \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)dx.\end{aligned}$$

Satz 4.6.5 (Partielle Integration). *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Es gilt*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

Beweis. Für $F = f \cdot g$ gilt

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Leftrightarrow f(x)g'(x) = F'(x) - f'(x)g(x),$$

für jedes $x \in [a,b]$. Also gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x))g'(x)dx &= \int_a^b [F'(x) - f'(x)g(x)]dx \\ &= \int_a^b F'(x)dx - \int_a^b f'(x)g(x)dx \\ &= F(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx\end{aligned}$$

$$= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx. \qquad \square$$

BEISPIEL 4.6.6. Seien $a, b > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b \ln(x)dx &= \int_a^b \ln(x)x'dx \\
&= x\ln(x)\Big|_a^b - \int_a^b \ln'(x)xdx \\
&= x\ln(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{x}xdx \\
&= x\ln(x)\Big|_a^b - \int_a^b dx \\
&= x\ln(x)\Big|_a^b - x\Big|_a^b \\
&= [x\ln(x) - x]\Big|_a^b \\
&= [x(\ln(x) - 1)]\Big|_a^b.
\end{aligned}$$

BEISPIEL 4.6.7. Sei das Integral

$$I = \int e^x \cos(x)dx.$$

Es gelten

$$\begin{aligned}
I &= \int (e^x)' \cos(x)dx \\
&= e^x\cos(x) - \int e^x[-\sin(x)]dx \\
&= e^x\cos(x) + \int e^x \sin(x)dx \\
&= e^x\cos(x) + J,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
J &= \int e^x \sin(x)dx \\
&= \int (e^x)' \sin(x)dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx \\
&= e^x \sin(x) - I.
\end{aligned}
$$

Also gilt

$$I = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - I \Leftrightarrow I = \frac{e^x}{2}[\cos(x) + \sin(x)].$$

.

4.7. Uneigentliche Integrale

Der bisher behandelte Integralbegriff ist für manche Anwendungen zu eng. So konnten wir bisher nur über endliche Intervalle integrieren und die Riemann-integrierbaren Funktionen waren notwendig beschränkt. Ist das Integrationsintervall unendlich oder die zu integrierende Funktion nicht beschränkt, so kommt man zu den uneigentlichen Integralen, die unter gewissen Bedingungen als Grenzwerte Riemannscher Integrale definiert werden können.

Fall 1. Eine Integrationsgrenze ist unendlich.

Definition 4.7.1. Sei $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Intervall $[a, M]$, wobei $a < M$, Riemann-integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$\lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

existiert, heißt das Integral

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

konvergent und man setzt

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x) dx.$$

Sei $g : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Intervall $[m, a]$, wobei $m < a$, Riemann-integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$\lim_{m \to -\infty} \int_m^a g(x) dx$$

existiert, heißt das Integral

$$\int_{-\infty}^{a} g(x)dx$$

konvergent und man setzt

$$\int_{-\infty}^{a} g(x)dx = \lim_{m\to-\infty} \int_{m}^{a} g(x)dx.$$

BEISPIEL 4.7.2. Seien $t, M > 1$. Weil

$$\left(\frac{1}{1-t}x^{1-t}\right)' = \frac{1}{x^t},$$

gilt

$$\begin{aligned}\int_1^M \frac{1}{x^t}dx &= \frac{1}{1-t}x^{1-t}\Big|_1^M \\ &= \frac{1}{1-t}(M^{1-t} - 1^{1-t}) \\ &= \frac{1}{t-1}(1 - M^{-(t-1)}) \\ &= \frac{1}{t-1}\left(1 - \frac{1}{M^{t-1}}\right),\end{aligned}$$

Da

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{M^{t-1}} = 0,$$

folgt

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^t}dx = \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{1}{t-1}\left(1 - \frac{1}{M^{t-1}}\right)\right] = \frac{1}{t-1}.$$

Andererseits zeigt man:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^t}dx$$

konvergiert nicht für $t \leq 1$ (Aufgabe).

Fall 2. Der Integrand ist an einer Integrationsgrenze nicht definiert.

DEFINITION 4.7.3. Sei $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[a+\epsilon, b]$, wobei $0 < \epsilon < b-a$, Riemann-integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$$

existiert, heißt das Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

konvergent und man setzt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx.$$

Sei $g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[a, b-\epsilon]$, wobei $0 < \epsilon < b-a$, Riemann-integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} g(x)dx$$

existiert, heißt das Integral

$$\int_a^b g(x)dx$$

konvergent und man setzt

$$\int_a^b g(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} g(x)dx.$$

Beispiel 4.7.4. Das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^t} dx$$

konvergiert für $t < 1$. Es gilt

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^t} dx = \frac{1}{1-t} x^{1-t} \bigg|_\epsilon^1 = \frac{1}{1-t}(1^{1-t} - \epsilon^{1-t}) = \frac{1}{1-t}(1 - \epsilon^{1-t}).$$

Da $\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{1-t} = 0$, folgt

$$\int_0^1 \frac{1}{x^t} dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{1}{1-t}(1 - \epsilon^{1-t}) \right] = \frac{1}{1-t}.$$

Andererseits zeigt man:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^t} dx$$

konvergiert nicht für $t \geq 1$ (Aufgabe).

Fall 3. Beide Integrationsgrenzen sind kritisch.

DEFINITION 4.7.5. Sei $f\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$, wobei

$$\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \quad \& \quad \beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

eine Funktion, die über jedem intervall $[a,b] \subseteq (\alpha,\beta)$ Riemann-integrierbar ist und sei $c \in (\alpha,\beta)$ beliebig. Falls die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_\alpha^c f(x)dx = \lim_{a\to\alpha} \int_a^c f(x)dx$$

und

$$\int_c^\beta f(x)dx = \lim_{b\to\beta} \int_c^b f(x)dx$$

konvergieren, heißt das Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

konvergent und man setzt

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Auswahl von $c \in (\alpha,\beta)$.

BEISPIEL 4.7.6. Das Integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^t}dx$$

divergiert für jedes $t \in \mathbb{R}$ (Aufgabe).

BEISPIEL 4.7.7. Ein nicht-triviales Beispiel eines uneigentlichen Integrals ist die Dirichletsche Formel

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

4.8. Integral-Vergleichskriterium für Reihen

Mithilfe der uneigentlichen Integrale kann man manchmal einfach entscheiden, ob eine unendliche Reihe konvergiert oder divergiert.

SATZ 4.8.1 (Integral-Vergleichskriterium für Reihen). *Sei $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}^+$ eine monoton fallende Funktion. Dann gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \textit{ konvergiert } \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx \textit{ konvergiert.}$$

Beweis. Seien die Treppenfunktionen $\phi\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $\psi\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \psi(x) &= f(n); \quad x \in [n, n+1),\ n \geq 1, \\ \phi(x) &= f(n+1); \quad x \in [n, n+1),\ n \geq 1. \end{aligned}$$

Integration über das Intervall $[1, N]$ ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{N} f(n) &= f(2) + \ldots + f(N) \\ &= \int_1^N \phi(x)dx \\ &\leq \int_1^N f(x)dx \\ &\leq \int_1^N \psi(x)dx \\ &= f(1) + \ldots + f(f(N-1) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} f(n). \end{aligned}$$

Falls

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

konvergiert, ist deshalb die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

beschränkt, also konvergent. Falls umgekehrt die Reihe konvergiert, so folgt, dass

$$\int_1^M f(x)dx$$

für $M \to +\infty$ monoton wachsend und beschränkt ist, also (nach dem Vollständigkeitsaxiom) konvergiert. □

Beispiel 4.8.2. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$$

konvergiert für $t > 1$ und divergiert für $t \leq 1$ (Aufgabe).

Insbesondere erhält man aus dem vorigen Beispiel für $t = 1$ die Divergenz der harmonischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

KAPITEL 5

Funktionenfolgen

Der Begriff der Konvergenz einer Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Funktion f, die alle denselben Definitionsbereich D haben, kann einfach auf den Konvergenzbegriff für Zahlenfolgen zurückgeführt werden: Man verlangt, dass an jeder Stelle $x \in D$ die Zahlenfolge $f_n(x)$, für $n \to +\infty$ gegen $f(x)$ konvergiert. Wenn man Aussagen über die Funktion f aufgrund der Eigenschaften der Funktionen f_n beweisen will, reicht jedoch meistens diese so genannte punktweise Konvergenz nicht aus. Man braucht zusätzlich, dass die Konvergenz gleichmäßig ist, das heißt grob gesprochen, dass die Konvergenz der Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ für alle $x \in D$ gleich schnell ist. Beispielsweise gilt bei gleichmäßiger Konvergenz, dass die Grenzfunktion f wieder stetig ist, falls alle f_n stetig sind. Die gleichmäßige Konvergenz spielt auch bei der Frage eine Rolle, wann Differentiation und Integration von Funktionen mit der Limesbildung vertauschbar sind. Besonders wichtige Beispiele für gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen liefern die Partialsummen von Potenzreihen.

5.1. Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 5.1.1. Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f_n\colon K \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen.
(i) *Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$, und wir schreiben*

$$f_n \xrightarrow{p} f,$$

falls für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert, d.h. wenn gilt:

$$\forall_{x\in K}\forall_{\epsilon>0}\exists_{N=N(x,\epsilon)\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N(x,\epsilon)}\big(|f_n(x) - f(x)| < \epsilon\big).$$

(ii) *Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$, und wir schreiben*

$$f_n \xrightarrow{g} f,$$

falls

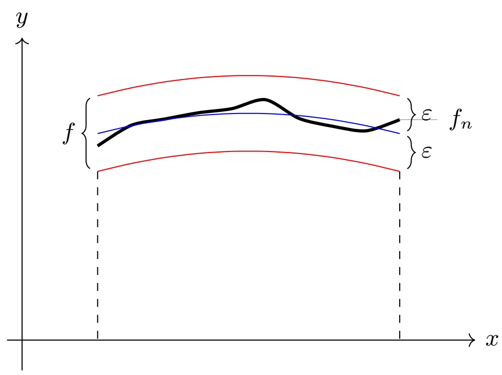
$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N=N(\epsilon)\in\mathbb{N}}\forall_{x\in K}\forall_{n\geq N(\epsilon)}\big(|f_n(x)-f(x)|<\epsilon\big).$$

Der Unterschied ist also der, dass im Fall gleichmäßiger Konvergenz N nur von ϵ, nicht aber von x abhängt.

Die Bedingung

$$\forall_{x\in K}\forall_{n\geq N(\epsilon)}\big(|f_n(x)-f(x)|<\epsilon\big)$$

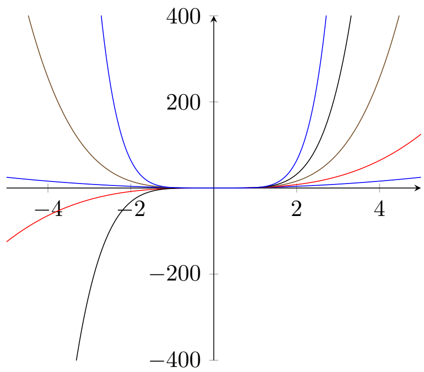
bedeutet, dass der Graph von f_n ganz im "ϵ-Streifen" zwischen $f-\epsilon$ und $f+\epsilon$ liegt.



Beispiel 5.1.2. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} 0^n = 0,$$

und die Folge $f_n(x) = x^n$, wobei $x \in \mathbb{R}$, punktweise (und gleichmäßig) gegen die konstante Funktion 0 konvergiert auf $K = \{0\}$.



Konvergiert eine Funktionenfolge gleichmäßig, so auch punktweise. Die Umkehrung gilt jedoch nicht.

Beispiel 5.1.3. Für $n \geq 2$ sei $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \max\left\{n - n^2\left|x - \frac{1}{n}\right|, 0\right\}.$$

Wir zeigen, dass die Folge (f_n) punktweise gegen die konstante Funktion 0 konvergiert auf $K = [0,1]$. Für $x = 0$ ist $f_n(x) = 0$ für alle n. Zu jedem $x \in (0,1]$ existiert ein $N \geq 2$, so dass

$$\forall_{n \geq N}\left(\frac{2}{n} \leq x\right).$$

Damit gilt $f_n(x) = 0$ für alle $n \geq N$ d.h. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Die Folge (f_n) konvergiert jedoch nicht gleichmäßig gegen 0, den für kein $n \geq 2$ gilt

$$\forall_{x\in[0,1]}\big(|f_n(x) - 0| < 1\big).$$

Satz 5.1.4. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch f stetig.*

Beweis. Sei $x_0 \in K$. Es ist zu zeigen, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\forall_{x\in K}\big(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\big).$$

Da die Folge (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall_{x\in K}\left(|f_N(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}\right).$$

Da f_N im Punkt x_0 stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall_{x\in K}\left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}\right).$$

Daher gilt für alle $x \in K$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \\
&= |(f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(x_0)) + (f_N(x_0) - f(x_0))| \\
&\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen nur punktweise, so braucht die Grenzfunktion nicht stetig zu sein.

5.2. Das Konvergenzkriterium von Weierstrass

DEFINITION 5.2.1 (Supremumsnorm). Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f\colon K \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann setzt man

$$||f||_K = \sup\{|f(x)| \mid x \in K\}.$$

Sind Missverständnisse ausgeschlossen, schreibt man oft kurz $||f||$ statt $||f||_K$.

Es gilt

$$||f||_K \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Die Funktion f ist genau dann beschränkt, wenn

$$||f||_K < +\infty.$$

Mithilfe der Supremumsnorm läßt sich die Definition der gleichmäßigen Konvergenz so umformen:
Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$, falls

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_K = 0.$$

Denn die Bedingung

$$\forall_{n\geq N(\epsilon)}\big(||f_n - f||_K \leq \epsilon\big)$$

ist gleichbedeutend mit

$$\forall_{x\in K}\forall_{n\geq N(\epsilon)}\big(|f_n(x) - f(x)| < \epsilon\big).$$

SATZ 5.2.2 (Konvergenzkriterium von Weierstrass). *Seien $f_n\colon K \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen. Es gelten*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||f_n||_K < \infty.$$

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

absolut und gleichmäßig auf K gegen eine Funktion $F\colon K \to \mathbb{R}$.

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, dass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ punktweise gegen eine gewisse Funktion $F\colon K \to \mathbb{R}$ konvergiert. Sei $x \in K$. Da

$$|f_n(x)| \leq ||f_n||_K,$$

konvergiert (nach dem Majoranten-Kriterium) die Reihe $\sum f_n(x)$ absolut. Wir setzen

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Damit ist eine Funktion $F\colon K \to \mathbb{R}$ definiert.
Sei

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k.$$

Wir beweisen jetzt, dass die Folge (F_n) gleichmäßig gegen F konvergiert. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aus der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} ||f_n||_K$ folgt, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\forall_{n \geq N} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} ||f_k||_K < \epsilon \right).$$

Dann gilt für $n \geq N$ und alle $x \in K$

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} ||f_k||_K \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

□

Beispiel 5.2.3. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, denn für

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

gilt

$$||f_n||_{\mathbb{R}} = \frac{1}{n^2} \quad \& \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}.$$

5.3. Integration und Limesbildung

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es gilt

$$||f||_{[a,b]} = ||f|| = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\} \in \mathbb{R}.$$

Satz 5.3.1. *Sei $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge stetiger Funktionen. Die Folge konvergiere auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Beweis. Nach Satz 5.1.4 ist f wieder stetig, also integrierbar. Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| &\le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \\ &\le \int_a^b ||f - f_n||dx \\ &= ||f - f_n||(b-a).\end{aligned}$$

Dies konvergiert für $n \to \infty$ gegen 0. □

5.4. Differentiation und Limesbildung

Satz 5.4.1. *Seien $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, stetig differenzierbare Funktionen, die punktweise gegen die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergieren. Die Folge der Ableitungen ${f_n}'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiere gleichmäßig. Dann ist f differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} {f_n}'(x),$$

fúr alle $x \in [a,b]$.

Beweis. Sei

$$f^* = \lim_{n\to\infty} {f_n}'.$$

Nach Satz 5.1.4 ist f^* wieder stetig auf $[a,b]$. Für alle $x \in [a,b]$ gilt

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x {f_n}'(t)dt.$$

Nach Satz 5.3.1

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x {f_n}'(t)dt = \int_a^x f^*(t)dt,$$

also erhält man

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f^*(t)dt.$$

Differentiation ergibt $f'(x) = f^*(x)$. □

Literaturverzeichnis

[1] O. Forster: *Analysis I*, Springer, 2016.
[2] S. Lang: *Undergraduate Analysis*, Springer, 1983.
[3] S. Lang: *A First Course in Calculus*, Springer, 1986.
[4] H. Schwichtenberg: *Constructive analysis with witnesses*, Lecture notes, LMU, 2019.