Dr. Iosif Petrakis Wintersemester 17/18

Logik

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $p \in \mathbb{Q}$, und sei $p^* : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{Q}$ definiert duch $p^*(n) \equiv p$, für alle $n \in \mathbb{N}$.
Man zeige:
(i) $p^* \in \mathbb{R}$.
(ii) Die Regel *, die jede rationale Zahl p einer reellen Zahl p^* zuordnet, ist eine Funktion von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.
(iii) Die Funktion $^* : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ist eine Injektion, d.h. $p^* =_{\mathbb{R}} q^* \Rightarrow p =_{\mathbb{Q}} q$, für alle $p, q \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2. (I) Geben Sie eine Regel von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{Q}$ an, die keine Funktion ist.
(II) Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Man zeige:
(i) $x =_{\mathbb{R}} x$,
(ii) $x =_{\mathbb{R}} y \Rightarrow y =_{\mathbb{R}} x$,
(iii) $(x =_{\mathbb{R}} y \ \wedge \ y =_{\mathbb{R}} z) \Rightarrow x =_{\mathbb{R}} z$.

Aufgabe 3. Sei $x \equiv (x_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \in \mathbb{R}$. Man zeige:

$$x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \exists_{N \in \mathbb{N}^+} \forall_{m \geq N} \left(x_m \geq \frac{1}{N} \right),$$

$$x \in \mathbb{R}^{\pm} \Leftrightarrow \forall_{k \in \mathbb{N}^+} \exists_{P_k \in \mathbb{N}^+} \forall_{m \geq P_k} \left(x_m \geq -\frac{1}{k} \right).$$

Aufgabe 4. Sei ϱ die Royden Zahl. Man zeige:
(i) $\varrho \in \mathbb{R}$.
(ii) $\varrho \geq 0$.
(iii) Wenn es einen Beweis der Disjunktion

$$\varrho > 0 \ \vee \ \varrho = 0$$

gibt, dann gibt es einen Beweis der Goldbachshen Vermutung oder ihrer Negation.

Abgabe. Freitag, 27. Oktober 2017, in der Vorlesung.

Besprechung. Freitag, 27. Oktober 2017, in der Übung.