Dr. Iosif Petrakis

Wintersemester 17/18
19.01.2018

Logik
Blatt 12

Aufgabe 1. Sei F ein Fächer und ein Spread auf X und sei G ein Fächer und ein Spread auf Y.
(i) Für $u \in F$ definieren wir

$$B(u) \equiv \{\alpha \in [F] \mid u \prec \alpha\},$$

$$u \prec \alpha \equiv \exists_{n\in\mathbb{N}}(\bar{\alpha}(n) = u).$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\{B(u) \mid u \in F\} \cup \{\emptyset\}$ eine Basis für eine Topologie T_F auf $[F]$ ist.
(*ii*) Sei $\phi : F \to G$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\forall_{u,w\in F}(u \preceq w \Rightarrow \phi(u) \preceq \phi(w)),$$

$$\forall_{\alpha\in[F]}\big(\lim_{n\to\infty} |\phi(\bar{\alpha}(n))| = \infty\big).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $[\phi] : [F] \to [G]$, definiert durch

$$\phi(\alpha) \equiv \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \phi(\bar{\alpha}(n)),$$

wobei $u \vee w \equiv \sup_{\preceq}\{u, w\}$, stetig bezüglich T_F und T_G ist.
(iii) Geben Sie Beispiele von Funktionen $\phi : F \to F$ und $[\phi] : [F] \to [F]$.

Aufgabe 2. Sei F ein Fächer auf X und sei G ein Fächer und ein Spread auf X.
Man zeige:
(i) Wenn alle Pfade von F endlich sind, dann gibt es einen Pfad von F maximaler Länge.
(ii) Wenn B eine Schranke (bar) von G ist, dann ist B uniform.

Seien $A \in \texttt{Form}$, $\mathcal{M} \equiv (D, F, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ ein Fächermodel von $\mathcal{L}$, η eine Variablenzuordnung in D.

Aufgabe 3. Seien $u, w \in F$. Man zeige:

$$u \preceq w \wedge u \Vdash A[\eta] \Rightarrow w \Vdash A[\eta].$$

Aufgabe 4. Man zeige:
(i) Die Menge

$$[\![A]\!]_{\mathcal{M},\eta} \equiv \{\alpha \in [F] \mid \exists_{n\in\mathbb{N}}\big(\bar{\alpha}(n) \Vdash A[\eta]\big)\}$$

ist offen in der Topologie T_F auf $[F]$.
(ii)

$$[\![A \wedge B]\!]_{\mathcal{M},\eta} \equiv [\![A]\!]_{\mathcal{M},\eta} \cap [\![B]\!]_{\mathcal{M},\eta},$$
$$[\![A \vee B]\!]_{\mathcal{M},\eta} \equiv [\![A]\!]_{\mathcal{M},\eta} \cup [\![B]\!]_{\mathcal{M},\eta}.$$

Abgabe. Freitag, 26. Januar 2018.

Besprechung. Freitag, 26. Januar 2018, in der Übung.