Dr. Iosif Petrakis

Wintersemester 17/18
22.12.2017

Logik

Blatt 10

Aufgabe 1. Man zeige:
(i) Wenn $\mathrm{sn}(MN, k)$, dann $\mathrm{sn}(M, k)$.
(ii) Wenn $\mathrm{sn}(M, k)$, dann $\mathrm{sn}(\lambda_v M, k)$.
(iii) Wenn $\mathrm{sn}(M(N)\vec{L}, k)$ und $\mathrm{sn}(N, l)$, dann $\mathrm{sn}((\lambda_v M(v))N\vec{L}, k + l + 1)$.

Aufgabe 2. (i) Man zeige, daß die Einschrittreduktion $\to$ zwischen Herleitungstermen nicht konfluent ist.
(ii) Man zeige oder widerlege:
Wenn R eine Relation auf X ist, dann gibt es die kleinste konfluente Relation, die die Relation R einschließt.

Aufgabe 3. Sei Λ definiert durch

$$\frac{x \in \texttt{Var}}{x \in \Lambda} \qquad \frac{x \in \texttt{Var}, \quad t \in \Lambda}{\lambda_x t \in \Lambda} \qquad \frac{s, t \in \Lambda}{st \in \Lambda}.$$

(i) Formulieren Sie das Induktionsprinzip für Λ.
(ii) Definieren Sie die Funktion $\mathrm{FV}(t)$, für $t \in \Lambda$, und die Substitution $t[x := s]$, für $t, s \in \Lambda$ und $x \in \texttt{Var}$.
(iii) Sei die β-Reduktion für Λ definiert durch

$$(\lambda_x t)s \mapsto_\beta t[x := s].$$

Zeigen Sie mithilfe des Terms

$$\lambda_x(xx),$$

daß es einen Term in Λ gibt, der nicht stark normalisierend ist.

$\Longrightarrow \Longrightarrow \Longrightarrow$

Aufgabe 4. Sei $M \in \texttt{Term}(\mathcal{D})$ und seien $M^*, {}^*M, B^*, {}^*B$ definiert durch

$$M^* \equiv \{K \in \texttt{Term}(\mathcal{D}) \mid M \to^* K\},$$

$$^*M \equiv \{K \in \texttt{Term}(\mathcal{D}) \mid K \to^* M\},$$

$$B^* \equiv \{M^* \mid \in \texttt{Term}(\mathcal{D})\} \cup \{\emptyset, \texttt{Term}(\mathcal{D})\},$$

$$^*B \equiv \{{}^*M \mid \in \texttt{Term}(\mathcal{D})\} \cup \{\emptyset, \texttt{Term}(\mathcal{D})\}.$$

Man zeige:

(i) Die Menge B^* ist eine Basis für eine Topologie $\mathcal{T}^*$ auf $\texttt{Term}(\mathcal{D})$ und die Menge ${}^*B$ ist eine Basis für eine Topologie ${}^*\mathcal{T}$ auf $\texttt{Term}(\mathcal{D})$.

(ii) $\mathcal{T}^* \neq {}^*\mathcal{T}$.

(iii) Die Funktion

$$\texttt{normal} : (\texttt{Term}(\mathcal{D}), \mathcal{T}^*) \to (\texttt{Term}(\mathcal{D}), \mathcal{T}^*),$$

$$\texttt{normal} : (\texttt{Term}(\mathcal{D}), {}^*\mathcal{T}) \to (\texttt{Term}(\mathcal{D}), {}^*\mathcal{T}),$$

$$\texttt{normal} : (\texttt{Term}(\mathcal{D}), \mathcal{T}^*) \to (\texttt{Term}(\mathcal{D}), {}^*\mathcal{T}),$$

$$\texttt{normal} : (\texttt{Term}(\mathcal{D}), {}^*\mathcal{T}) \to (\texttt{Term}(\mathcal{D}), \mathcal{T}^*),$$

definiert durch

$$M \mapsto N_M$$

ist in allen Fällen stetig.

Abgabe. Freitag, 12. Januar 2017.

Besprechung. Freitag, 12. Januar, in der Übung.