Mathematisches Institut
der Universität München
Dr. habil. Josef Berger
Dr. Iosif Petrakis

Wintersemester 2015/2016
Blatt 8

Übungen zur Vorlesung "Logik"

Seien $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ Mengen von Formeln und ϕ eine Formel.

Aufgabe 1. **(i)** Wenn es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Modell $\mathcal{A}$ und eine Belegung b gibt, so dass $\mathcal{A} \models \Sigma[b]$ und der Träger von $\mathcal{A}$ n Elemente hat, dann gibt es ein Modell $\mathcal{A}$ und eine Belegung b so dass $\mathcal{A} \models \Sigma[b]$ und der Träger von $\mathcal{A}$ unendlich ist.

(ii) Wenn für jedes Modell $\mathcal{A}$ mit einem unendlichen Träger und für jede Belegung b

$$\mathcal{A} \models \Sigma[b] \;\; \Rightarrow \mathcal{A} \models \phi[b]$$

gilt, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Modell $\mathcal{A}$ und für jede Belegung b

$$(\text{der Träger von } \mathcal{A} \text{ hat} \geq k \text{ Elemente und } \mathcal{A} \models \Sigma[b]) \Rightarrow \mathcal{A} \models \phi[b].$$

Aufgabe 2. Wenn $\mathcal{A} \models \Sigma[b]$ und der Träger von $\mathcal{A}$ so viele Elemente hat wie $\mathbb{N}$, dann gibt es ein Modell $\mathcal{B}$, so dass $\mathcal{B} \models \Sigma[b]$ und der Träger von $\mathcal{B}$ mindestens so viele Elemente hat wie $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Sei $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ nicht erfüllbar. Man zeige:
Es existiert eine Formel ϕ mit $\Sigma_1 \models \phi$ und $\Sigma_2 \models \neg\phi$.

Aufgabe 4. Finden Sie einen sinnvollen Weg, jedem Term t eine Komplexität $\#t$ zuzuordnen. Formulieren Sie damit ein Induktionsprinzip für Terme analog zu Proposition 6 der Vorlesung und beweisen Sie dieses.

Abgabe. Donnerstag, 10. Dezember 2015, in der Vorlesung.

Besprechung. Donnerstag, 10. Dezember 2015, in der Übung.