Mathematisches Institut
der Universität München
Dr. habil. Josef Berger
Dr. Iosif Petrakis

Wintersemester 2015/2016
Blatt 7

Übungen zur Vorlesung "Logik"

Aufgabe 1. Sei Σ eine Menge von Formeln und ϕ eine Formel.
(i) Man beweise oder widerlege:

$$\Sigma \models \phi \text{ oder } \Sigma \models \neg\phi$$

(ii) Man zeige:

$$\Sigma \models \phi \;\Leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg\phi\} \text{ ist nicht erfüllbar.}$$

Aufgabe 2. (i) Geben Sie eine Sprache $\mathcal{L}$ und eine Formel ϕ von $\mathcal{L}$ an, so dass für jedes Modell $\mathcal{A}$ der Sprache $\mathcal{L}$ und für jede Belegung b gilt:

$$\mathcal{A} \models \phi[b] \;\Leftrightarrow\; \text{der Träger von } \mathcal{A} \text{ hat genau zwei Elemente.}$$

(ii) Geben Sie eine Sprache $\mathcal{L}$ und eine Formel ϕ von $\mathcal{L}$ an, so dass ϕ erfüllbar ohne endliche Modelle ist.

Aufgabe 3. Man beweise oder widerlege, dass für alle Formeln ϕ, ψ und σ gilt:
(i) $(\phi \vee \psi) \models \sigma \;\Leftrightarrow\; (\phi \models \sigma$ und $\psi \models \sigma)$.
(ii) $(\phi \wedge \psi) \models \sigma \;\Leftrightarrow\; (\phi \models \sigma$ oder $\psi \models \sigma)$.

Aufgabe 4. Die Sprache $\mathcal{L}_0$ sei gegeben durch ein zweistelliges Relationszeichen R. Es sei $\mathcal{A}_0 = (\mathbb{N}, \hat{R})$ das Modell der Sprache $\mathcal{L}_0$ mit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und

$$\hat{R} = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ und } m < n\}.$$

Ferner sei f ein einstelliges Funktionszeichen und $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup \{f\}$.

Man zeige, dass für jedes Modell $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \hat{R}, \hat{f})$ der Sprache $\mathcal{L}$ und für jede Belegung b gilt:

$$\mathcal{A} \models \forall x \exists y \exists z (R(x, y) \wedge R(y, z) \wedge \neg R(f(z), f(y)))[b]$$

Abgabe. Donnerstag, 03. Dezember 2015, in der Vorlesung.

Besprechung. Donnerstag, 03. Dezember 2015, in der Übung.