Mathematisches Institut
der Universität München
Dr. habil. Josef Berger
Dr. Iosif Petrakis

Wintersemester 2015/2016
Blatt 12

Übungen zur Vorlesung “Logik”, Probeklausur

Aufgabe 1. Der Rang $r(\phi)$ einer Formel ϕ ist definiert durch

$$\begin{aligned} r(\phi) &:= 0, \quad \phi \text{ Primformel} \\ r(\phi \Box \psi) &:= \max\{r(\phi), r(\psi)\} + 1, \quad \Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\} \\ r(\exists x \phi[x/v]) = r(\forall \phi[x/v]) &:= r(\phi) + 1. \end{aligned}$$

(a) Definieren Sie eine Funktion $||.|| : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$ so dass

$$||\phi|| = \text{ die Anzahl von logischen Zeichen } \{\wedge, \vee, \rightarrow, \exists, \forall\} \text{ in } \phi.$$

(b) Zeigen Sie, dass für jede Formel ϕ

$$r(\phi) \leq ||\phi||.$$

Aufgabe 2. **(a)** $\vdash \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \rightarrow \psi \vee \phi$
(b) $\vdash_m \phi \wedge \neg\psi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \psi)$.

Aufgabe 3. Sei $L = \{g\}$ mit g zweistelliges Funktionszeichen. Sei ϕ die Formel

$$\exists x \; \forall y \; g(x, y) \doteq y.$$

Geben Sie zwei Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ der Sprache L an mit ϕ gilt in $\mathcal{A}$, aber nicht in $\mathcal{B}$.

Aufgabe 4. Sei Σ eine Menge von Formeln. Wir definieren

$$\overline{\Sigma} := \{\phi \in \mathcal{F} \mid \Sigma \models \phi\}.$$

Man zeige:
(a) $\Sigma \subseteq \overline{\Sigma}$.
(b) Wenn Σ_1, Σ_2 Mengen von Formeln sind mit $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, dann $\overline{\Sigma_1} \subseteq \overline{\Sigma_2}$.
(c) $\overline{\overline{\Sigma}} = \overline{\Sigma}$.

Aufgabe 5. (a) Zeigen Sie, dass die faktorielle Funktion $n \mapsto n!$ rekursiv ist.

(b) Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g(\vec{n}, m) := \prod_{i \leq m} f(\vec{n}, i)$$

rekursiv ist.

(c) Seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine rekursive Funktion und $R \subseteq \mathbb{N}$.

Man beweise oder widerlege:

(i) Wenn R rekursiv ist, dann ist $f(R)$ rekursiv.
(ii) Wenn R rekursiv aufzählbar ist, dann ist $f(R)$ rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 6. Seien $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g_1, g_2 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, und $h_1, h_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\begin{aligned} h_1(0, n) &= f_1(n) \\ h_2(0, n) &= f_2(n) \\ h_1(m+1, n) &= g_1(h_1(m, n), h_2(m, n), n) \\ h_2(m+1, n) &= g_2(h_1(m, n), h_2(m, n), n). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass wenn f_1, f_2, g_1, g_2 rekursiv sind, dann sind h_1, h_2 rekursiv.

Abgabe. Donnerstag, 28. Januar 2016, in der Vorlesung.

Besprechung. Donnerstag, 28. Januar 2016, in der Übung.