LMU	LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN	MATHEMATISCHES INSTITUT	

Prof. Dr. Tomasz Cieslak
Dr. Iosif Petrakis

Sommersemester 2016
14.07.2016

Analysis II für Statistiker

Klausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss:	Bachelor, PO ❑ 2012 ❑ 2015 ❑ 2016			Master, PO ❑ 2015 ❑ 2016		
	Lehramt Gymnasium:		❑ modularisiert	❑ nicht modularisiert		
	❑ Diplom	❑ Anderes: ______________				
Hauptfach:	❑ Mathematik	❑ Wirtschaftsm.	❑ Inf.	❑ Phys.	❑ Stat.	❑ ________
Nebenfach:	❑ Mathematik	❑ Wirtschaftsm.	❑ Inf.	❑ Phys.	❑ Stat.	❑ ________
Anrechnung	der Credit Points für das	❑ Hauptfach	❑ Nebenfach	(Bachelor / Master)		

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar auf den Tisch.
Bitte überprüfen Sie, ob Sie **vier Aufgaben** erhalten haben.
Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.
Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe.
Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Falls Sie einen Übungsschein benötigen (nicht modularisiert), füllen Sie bitte das Formular auf der folgenden Seite aus.
Durch Angabe eines Pseudonyms links unten (z.B. die letzten vier Ziffern Ihrer Matrikelnummer) stimmen Sie der Veröffentlichung von Klausurergebnis und Pseudonym im Internet zu.

Sie haben **120 minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

Pseudonym	1	2
	/4	/6

	3	4	$\sum$
	/5	/5	/20

Aufgabe 1:

(a) Sei $\dot{x} = 3x^3 - x$.

Füllen Sie die Lücke aus.

(i) Wenn $x(0) = \frac{1}{2}$, dann $\lim_{t \to -\infty} x(t) =$__

(ii) Wenn $x(0) = 1$, dann $\lim_{t \to \infty} x(t) =$__

Schreiben Sie nur "Wahr" oder "Falsch".

(iii) Wenn $-1 < x(0) < 0$, dann ist $x(t)$ eine fallende Funktion von t.

(1 Punkt, wenn alle drei Antworten richtig sind)

(b) Sei (E) das system der Gleichungen

$$\dot{x} = -y + 5,$$

$$\dot{y} = x - \frac{5x}{y}.$$

Schreiben Sie nur "Wahr" oder "Falsch".

(i) Die Funktion $H(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ ist ein erstes Integral von (E).

(ii) Wenn $(x(0), y(0)) = (2, 0)$, dann gibt es $\bar{t}$, so dass $(x(\bar{t}), y(\bar{t})) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

(1 Punkt, wenn alle zwei Antworten richtig sind)

(c) Sind die folgenden Mengen "offene" oder "geschlossene" Teilmengen? Schreiben Sie nur "offen" oder "geschlossen" oder "weder offen noch geschlossen".

(i) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - (5, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1})|| \leq 2\}$.

(ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < \frac{1}{x^2+1}\}$.

(iii) $\{f \in C([0, 1]) \mid -1 < f(x) \leq 2x + 1, x \in [0, 1]\}$.

(1 Punkt, wenn alle drei Antworten richtig sind)

(d) Definieren Sie die folgenden Begriffe.

(i) Monotone Klasse von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

(ii) Geringste monotone Klasse, die die Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ von $\mathbb{R}^n$ beinhaltet.

(1 Punkt)

Aufgabe 2:
(a) Formulieren Sie den Satz von Levy und das Lemma von Fatou.
(2 Punkte)

(b) Beweisen Sie das Lemma von Fatou mithilfe vom Satz von Levy.
(2 Punkte)

(c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und sei H_f definiert durch

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass wenn H_f positiv definit ist, dann hat H_f positive Eigenwerte.
(2 Punkte)

Aufgabe 3: Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(i)

$$\int_0^1 \int_{y^{\frac{1}{4}}}^1 \frac{1}{x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} dxdy.$$

(2,5 Punkte)

(ii)

$$\int_A \sin(x^2+y^2) dxdy,$$

wobei A durch

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$$

definiert ist.

(2,5 Punkte)

Aufgabe 4: Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) := y - 2x,$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$. Seien A, B definiert durch

$$A := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\},$$

$$B := \{(x, y, z) \mid z - x \geq 0\}.$$

Berechnen Sie die Extremwerte von f auf $A \cap B$.

(5 Punkte)