Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Hans-Dieter Donder
Iosif Petrakis

Sommersemester 2013
Blatt 5

Übungen zur Vorlesung "Modelle der Mengenlehre"

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass $w = u \times v$ eine Σ_0-Formel ist.

Aufgabe 2. Sei $\langle W_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On} \rangle$ eine Folge mit den Eigenschaften

$$(1)\ \alpha \leq \beta \to W_\alpha \subseteq W_\beta,$$
$$(2)\ \lim(\lambda) \to W_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} W_\alpha,$$
$$(3)\ V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} W_\alpha$$

Setze $C = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid V_\alpha = W_\alpha\}$. Zeigen Sie, dass C abgeschlossen und unbeschränkt in On ist.

Aufgabe 3. Sei W ein inneres Modell. Zeigen Sie, dass für alle Limesordinalzahlen τ gilt, dass $\mathrm{cf}(\tau) \leq \mathrm{cf}^W(\tau)$.

Aufgabe 4. Sei W ein inneres Modell von ZF. Seien $\phi(x), \psi_0(x), \psi_1(x)$ ZF-Formeln mit höchstens x frei, und seien $\psi_0(x)$ Σ_1-Formel und $\psi_1(x)$ Π_1-Formel. Weiterhin sei

$$\mathrm{ZF} \ \vdash \ \forall x \ (\phi(x) \leftrightarrow \psi_0(x) \leftrightarrow \psi_1(x)).$$

Man zeige, dass

$$\mathrm{ZF} \ \vdash \ \forall x \in W \ (\phi(x) \leftrightarrow \phi^W(x)).$$

Abgabe. Donnerstag, 23. Mai 2013, in der Vorlesung.

Besprechung. Donnerstag, 23. Mai 2013, in der Übung.