Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Hans-Dieter Donder
Iosif Petrakis

Sommersemester 2013
Blatt 10

Übungen zur Vorlesung "Modelle der Mengenlehre"

Sei M abzählbares transitives Modell von ZFC, $<\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}> \in M$ Bedingungsmenge und $\Vdash$ die zugehörige Forcingrelation.

Aufgabe 1. Sei $G \subseteq P$. Es gelte:
(G1) $\mathbb{1} \in G$; $p \in G \;\wedge\; p \leq q \;\rightarrow\; q \in G$.
(G2) Falls $p, q \in G$, so sind p, q verträglich.
(G3) Falls $D \in M$ dicht in $\mathbb{P}$, so $D \cap G \neq \emptyset$.

Zeigen Sie, dass G M-generisch ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:
(a) $p \Vdash \neg\phi$ gdw $\forall q \leq p \neg\, q \Vdash \phi$.
(b) $p \Vdash (\phi \wedge \psi)$ gdw $(p \Vdash \phi$ und $p \Vdash \psi)$.
(c) $p \Vdash \exists x \phi$ gdw $\forall q \leq p\; \exists r \leq q\; \exists a\; r \Vdash \phi(a)$.

Aufgabe 3. Sei $D \subseteq \mathbb{P}$ mit $D \in M$. Weiterhin sei $G \subseteq \mathbb{P}$ M-generisch, und sei $p \in G$. Es gelte:

$$\forall q \leq p\; \exists r \in D\; q, r \text{ verträglich.}$$

Man zeige, dass $D \cap G \neq \emptyset$.

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{P} = \{p \in M \mid p : n \to \omega, n \in \omega\}$, $\underset{\sim}{\mathbb{P}} = <\mathbb{P}, \supseteq, \emptyset>$. Weiterhin sei $G \subseteq \mathbb{P}$ M-generisch und

$$f = \bigcup G : \omega \to \omega.$$

Zeigen Sie, dass kein $g \in M$ existiert mit $\forall n \in \omega\; f(n) \leq g(n)$.

Abgabe. Donnerstag, 04. Juli 2013, in der Vorlesung.

Besprechung. Donnerstag, 04. Juli 2013, in der Übung.