LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Tomasz Cieslak
Dr. Iosif Petrakis

Sommersemester 2016
02.06.2016

Analysis II für Statistiker

Blatt 8

Eine Funktion f, deren Umkehrfunktion auf $f(V)$ definiert ist, wird als invertierbar auf V bezeichnet.

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) := (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

(i) Zeigen Sie, das für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gibt es $\delta > 0$, so dass f invertierbar auf $K(x, \delta)$ ist.
(ii) Zeigen oder widelegen Sie, ob f invertierbar auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 2. Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = 0 \text{ genau dann wenn } x \text{ ein Fixpunkt von } \mathrm{id}_n - af \text{ ist,}$$

wobei $\mathrm{id}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $\mathrm{id}_n(x) := x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert ist.

Das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch $(x, y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$, für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3. Sei$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $m > 0$, so dass

$$m||x - y||^2 \leq \ (f(x) - f(y), x - y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Zeigen Sie, dass f invertierbar auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $m, \sigma > 0$, so dass

$$m||x - y||^2 \leq \ (f(x) - f(y), x - y)$$

und

$$||f(x) - f(y)|| \leq \sigma ||x - y||$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$\text{wenn } a \in (0, \tfrac{2m}{\sigma^2}) \text{ dann gibt ein eindeutig } x \in \mathbb{R}^n \text{ es, so dass } f(x) = 0.$$