Prof. Dr. Tomasz Cieslak
Dr. Iosif Petrakis

Sommersemester 2016
21.04.2016

Analysis II für Statistiker

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $C([-1,1])$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$, für alle $f, g \in C([-1,1])$. Finden Sie die Projektion von $f(t) = t^3$ auf dem Unterraum $M = \text{span}\{1, t, t^2\}$ von $C([-1,1])$.

Aufgabe 2. Zeigen oder widerlegen Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ kompakt sind:
(i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
(ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\}$.
(iii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^x = \cos y\}$.
(iv) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Aufgabe 3. Seien $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^m$ und $x_0 \in \mathbb{R}^m$, so dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Zeigen Sie, dass

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$$

eine kompakt Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ ist.

Aufgabe 4. Sei A eine symmetrische $n \times n$–Matrix über den reelen Zahlen und sei f die quadratische Form von A definiert durch

$$f(x) :=< x, Ax >,$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass der Maximalwert von f auf der Einheitssphäre gleich zu dem maximalen Eigenwert von A ist.