Prof. Dr. Tomasz Cieslak
Dr. Iosif Petrakis

Sommersemester 2016
23.06.2016

Analysis II für Statistiker

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := e^{-x^2-xy} + \lim_{n\to\infty} f_n(x,y),$$

wobei

$$f_n(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{, if } (x,y) \in \{(0,0),(1,1),\ldots,(n,n)\} \\ 0 & \text{, anderenfalls} \end{cases}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f eine Lebesgue-messbare Funktion ist.

Aufgabe 2. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f : X \to [0, +\infty)$

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i},$$

wobei $A_i \in \mathcal{A}$ und $a_i \geq 0$, für alle $1 \leq i \leq n$, $A_i \cap A_k = \emptyset$ und $a_i \neq a_k$, für alle $i, k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq k$. Sei

$$f = \sum_{i=1}^{n} b_j \mathcal{X}_{B_j},$$

wobei $B_j \in \mathcal{A}$ und $b_j \geq 0$, für alle $1 \leq i \leq n$, $B_j \cap B_l = \emptyset$, für alle $j, l \in \{1, \ldots, m\}$ mit $j \neq l$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j).$$

Aufgabe 3. Sei A eine Lebesgue-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit $0 < \lambda_L(A) < \infty$, und sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare Funktion.

(i) Wenn $\int_A |f|^p d\lambda < \infty$, wobei $p > 1$, dann gibt es $c > 0$, so dass für alle $1 \leq q \leq p$ gilt

$$\left(\int_A |f|^q d\lambda\right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_A |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) Wenn $f \geq 0$, dann gilt

$$\int_A f d\lambda = 0 \leftrightarrow f = 0 \text{ fast überall auf } A.$$

Aufgabe 4. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und seien $r_0, \delta > 0$. Wir definieren

$$H^{\delta}_{r_0}(A) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} r_i^{\delta} \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i),\ (x_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n, \forall_{i\geq 1}(0 \leq r_i \leq r_0)\},$$

und

$$H^{\delta}(A) := \lim_{r_0 \to 0} H^{\delta}_{r_0}(A).$$

Zeigen Sie, dass H^{δ} ein äußeres Maß der $\mathbb{R}^n$ ist.