LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Tomasz Cieslak
Dr. Iosif Petrakis

Sommersemester 2016
14.04.2016

Analysis II für Statistiker

Blatt 1

Aufgabe 1. (a) Wenn A eine symmetrische Matrix über den reelen Zahlen ist, so dass für jedes $x \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$ gilt $< x, Ax >> 0$, dann ist

$$x \cdot y := < x, Ay >$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

(b) Wenn $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind, dann ist

$$< f, g > := \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

ein Skalarprodukt auf $C([0,1])$.

(c) Wenn f, g Polynome vom Grad kleiner oder gleich n sind und

$$f(x) = \sum_0^n a_i x^i, \quad g(x) = \sum_0^n b_i x^i,$$

dann ist

$$< f, g > := \sum_0^n a_i b_i,$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}_n[x]$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist.

Hinweis: Verwenden Sie das Kriterium von Sylvester.

Aufgabe 3. Seien A, B, C $n \times n$–Matrizen über den reelen Zahlen, so dass C eine invertierbare Matrix ist und $A = C^{-1}BC$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B),$$

wobei $\mathrm{Tr}(A)$ die Summe der Hauptdiagonalelemente von A ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für alle $n \times n$–Matrizen A, B gilt $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Aufgabe 4. Sei A eine $n \times n$–Matrix über den reelen Zahlen mit den Spaltenvektoren $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, dann gilt mit der euklidischen Norm $||.||$

$$|\det(A)| \leq \prod_1^n ||\sigma_i||.$$