Priv.-Doz. Dr. Josef Berger
Dr. Iosif Petrakis

Wintersemester 16/17
26.01.2017

Logik
Blatt 12

Aufgabe 1. Aufgabe 1: Die Gödel-Übersetzung $^\circ$ auf $\mathcal{F}$ ist definiert durch:

1. $\bot^\circ = \bot$.
2. $\phi^\circ = \neg\neg\phi$, für Primformeln verschieden von $\bot$.
3. $(\phi \wedge \psi)^\circ = \phi^\circ \wedge \psi^\circ$.
4. $(\phi \vee \psi)^\circ = \neg(\neg\phi^\circ \wedge \neg\psi^\circ)$.
5. $(\phi \to \psi)^\circ = \phi^\circ \to \psi^\circ$.
6. $(\forall x\psi[x/v])^\circ = \forall x\psi^\circ[x/v]$.
7. $(\exists x\psi[x/v])^\circ = \neg\forall x\neg\psi^\circ[x/v]$.

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für jede Formel ϕ

$$\phi^\circ \in \mathcal{F}.$$

(b) (2 Punkte) Zeigen oder widerlegen Sie:

Für jede Formel ψ gibt eine Formel ϕ, so dass $\psi = \phi^\circ$.

Aufgabe 2. (a) $\vdash \neg\forall x\neg\phi[x/v] \to \exists x\phi[x/v]$. (3 Punkte)

(b) $\vdash_m \neg\neg\neg\phi \to \neg\phi$. (3 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $L = \{g, S\}$, wobei g ein zweistelliges Funktionszeichen und S ein einstelliges Relationszeichen ist. Ist die Formel

$$\exists x \left(S(x) \wedge \forall y\ S(g(x, y)) \right)$$

allgemeingültig?

Aufgabe 4. Sei $L = \{g\}$ mit g einstelliges Funktionszeichen. Seien ϕ und ψ die Formeln

$$\phi := \forall x \forall y (g(x) \doteq g(y) \to x \doteq y),$$

$$\psi := \exists z \forall x (\neg(g(x) \doteq z)).$$

Geben Sie eine L-Formel σ an, so dass:
(i) σ erfüllbar ist und
(ii) σ kein endliches Modell besitzt.

Aufgabe 5. Seien $A \subseteq \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv.

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Wenn A rekursiv ist, dann ist $f^{-1}(A)$ rekursiv. (2 Punkte)

(b) Wenn A rekursiv aufzählbar ist, dann ist $f^{-1}(A)$ rekursiv aufzählbar. (2 Punkte)

(c) Wenn A rekursiv aufzählbar ist, so dass $\mathbb{N} \setminus A$ unendlich ist und keine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N} \setminus A$ rekursiv ist, dann ist A rekursiv. (2 Punkte)

Aufgabe 6. Sei $\mathrm{Per}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ definiert durch

$$\mathrm{Per}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) := \Big\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ rekursive Bijektion} \Big\}.$$

Seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Wir definieren

$$A \cong B :\leftrightarrow \exists f \in \mathrm{Per}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \big(f(A) = B \big).$$

Zeigen Sie:

(a) $A \cong A$ (1 Punkt).

(b) Wenn $A \cong B$, dann $B \cong A$ (4 Punkte)

(c) Wenn $A \cong B$ and $B \cong C$, dann $A \cong C$ (1 Punkt).

Abgabe. Donnerstag, 02. Februar 2017.

Besprechung. Freitag, 03. Februar 2017, in der Übung.