Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Hans-Dieter Donder
Iosif Petrakis

Wintersemester 2014/2015
Blatt 7

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Logik"

Aufgabe 1. Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ die übliche Struktur die natürlichen Zahlen, und sei $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$. Man zeige, dass eine Unterstruktur $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{B}$ existiert, die isomorph zu $\mathfrak{A}$ ist.

Für eine L-Theorie T sei im folgenden $\hat{T}$ definiert durch

$$\hat{T} = \{\phi \mid \phi \text{ } L\text{-Aussage}, \ T \models \phi\}.$$

Aufgabe 2. Sei T eine L-Theorie. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) $\hat{T}$ ist vollstätig.

(2) Für alle L-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \models T$ und $\mathfrak{B} \models T$ gilt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Aufgabe 3. Sei L abzählbar. Weterhin sei T eine L-Theorie mit der Eigenschaft, dass je zwei abzählbare Modelle von T isomorph sind. Zeigen Sie dass $\hat{T}$ vollstandig ist.

Aufgabe 4. Sei $L = \{U\}$, wobei U ein einstelliges Relationszeichen ist. Sei

$$T = \{\exists x_0 \ldots \exists x_n (U(x_0) \wedge \ldots \wedge U(x_n) \wedge \bigwedge_{i<j\leq n} x_i \neq x_j) \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\} \cup$$

$$\cup \{\exists x_0 \ldots \exists x_n (\neg U(x_0) \wedge \ldots \wedge \neg U(x_n) \wedge \bigwedge_{i<j\leq n} x_i \neq x_j) \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\},$$

wobei $\bigwedge_{i<j\leq n} x_i \neq x_j$ Abkürzung für die Konjunktion der Formeln $x_i \neq x_j$ $(i < j \leq n)$ ist.

Zeigen Sie, dass $\hat{T}$ vollstandig ist.

Abgabe. Donnerstag, 27. November 2014, in der Vorlesung.

Besprechung. Donnerstag, 27. November 2014, in der Übung.