Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Hans-Dieter Donder
Iosif Petrakis

Wintersemester 2014/2015
Blatt 11

"Mathematische Logik" Probeklausur

Aufgabe 1. Sei L eine Sprache erster Stufe. Zeigen Sie, dass jede L-Formel die gleiche Anzahl von rechten und linken Klammern besitzt.

Aufgabe 2. Sei $L = (\leq)$ eine Sprache erster Stufe. Zeigen Sie, dass es keine L-Theorie T gibt, für die gilt

$$\mathfrak{A} = (A, \leq^{\mathfrak{A}}) \models T \leftrightarrow \mathfrak{A} \text{ ist eine Wohlordnung.}$$

(Eine Wohlordnung $(A, \leq)$ ist eine lineare Ordnung, sodass es für jede nicht leere Teilmenge von A ein kleinstes Element gibt)

Aufgabe 3. Für eine Aussage ϕ setze

$$S(\phi) = \{|A| \mid \mathfrak{A} \models \phi, A = \text{ Träger von } \mathfrak{A}, A \text{ endlich}\}.$$

Man zeige:

es existiert eine Aussage ϕ mit

$$S(\phi) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist keine Primzahl}\}.$$

Aufgabe 4. Finden Sie eine Ableitung für folgende Regel:

$$\frac{\Gamma(\phi \to \psi) \quad \Gamma\phi}{\Gamma\psi}.$$

Aufgabe 5. **(a)** Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekursiv Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g(m, \vec{a}) = \sum_{i \leq m} f(i, \vec{a})$$

rekursiv ist.

(b) Sei f eine rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass wenn $Q \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar ist, dann ist $f(Q)$ rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 6. Sei $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$A(0, y) = y + 1$$
$$A(x + 1, 0) = A(x, 1)$$
$$A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y)).$$

(a) Zeigen Sei die folgende Eigenschaften von A:
(i) $A(x, y) > y$
(ii) $A(x, y) < A(x, y + 1)$
(iii) $y < z \to A(x, y) < A(x, z)$
(iv) $A(x + 1, y) \geq A(x, y + 1)$

(b) Wenn $r \geq 0$ und $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, ist f höchstens vom Rang r genau dann wenn

$$\forall \vec{m}\ f(\vec{m}) \leq A(r, \max(\vec{m})).$$

Zeigen Sie, dass es kein r gibt, für das gilt A ist höchstens vom Rang r.

Abgabe. Donnerstag, 15. Januar 2015, in der Vorlesung.

Besprechung. Donnerstag, 15. Januar 2015, in der Übung.