

### Übungen zur Vorlesung “Mathematische Logik”

**Aufgabe 1.** Sei  $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ , und sei  $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$  die zugehörige Sprache. Sei  $\phi$  die  $L$ -Formel  $\exists z z \cdot x = y$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  seien konstante  $L$ -Terme  $s_n$  rekursiv definiert durch  $s_0 = 0$ ,  $s_{n+1} = s_n + 1$ . Sei  $P$  die Menge aller Primzahlen und  $M \subseteq P$ . Man zeige:

es existieren  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{N}$  und  $a \in \mathfrak{A}$  mit  $M = \{p \in P \mid \mathfrak{A} \models \phi_{x,y}[s_p, a]\}$ .

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, dass folgende Regel ableitbar ist:

$$\frac{s_1 = s_2 \quad s_2 = s_3}{s_1 = s_3} \quad (s_1, s_2, s_3 \text{ Terme})$$

**Aufgabe 3.** Zeigen Sie, dass folgende drei Regeln ableitbar sind:

$$\frac{\Gamma \phi}{\Gamma \neg \neg \phi} \quad ; \quad \frac{\Gamma \forall x \phi}{\Gamma \exists x \phi} \quad ; \quad \frac{\Gamma \phi \psi}{\Gamma (\phi \rightarrow \psi)}$$

( $\Gamma$  leer oder Sequenz,  $\phi, \psi$  Formeln)

**Abgabe.** Donnerstag, 12. Dezember 2013, in der Vorlesung.

**Besprechung.** Donnerstag, 12. Dezember 2013, in der Übung.