Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Hans-Dieter Donder
Iosif Petrakis

Wintersemester 2013/2014
Blatt 5

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Logik"

Aufgabe 1. Seien L eine endliche Sprache und $\mathfrak{A}$ eine endliche L-Struktur. Zeigen Sie, dass es eine L-Aussage ϕ gibt mit der Eigenschaft:

Für alle L-Strukturen $\mathfrak{B}$: ($\mathfrak{B} \models \phi$ gdw $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$).

Aufgabe 2. Eine L-Formel ϕ ist *termreduziert*, wenn sie nur atomare Formeln der Form

$$R(x_1, \ldots, x_n), \quad f(x_1, \ldots, x_n) = y, \quad x = y, \quad c = x$$

enthält, wobei $x_1, \ldots, x_n, y$ Variablen, c Konstante, R Relationszeichen, f Funktionszeichen sind. Man zeige:

Für alle L-Aussagen ϕ existiert eine termreduzierte L-Aussage ψ mit

$$\models (\phi \leftrightarrow \psi).$$

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ der Körper der reellen Zahlen. Sei $<$ die übliche Ordnung auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es eine Formel erster Stufe mit den freien Variablen x, y gibt, für die gilt:

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$: ($a < b$ gdw $\mathfrak{A} \models \phi_{x,y}[a, b]$).

Abgabe. Donnerstag, 21. November 2013, in der Vorlesung.

Besprechung. Donnerstag, 21. November 2013, in der Übung.