Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Hans-Dieter Donder
Iosif Petrakis

Wintersemester 2013/2014
Blatt 12

“Mathematische Logik” Probeklausur

Aufgabe 1. Sei L eine Sprache erster Stufe. Zeigen Sie, dass das letzte Zeichen jeder L-Formel eine rechte Klammer “)”, eine Variable oder eine Konstante ist.

Aufgabe 2. Sei $L = (\leq)$ eine Sprache erster Stufe. Zeigen Sie, dass es keine L-Theorie T gibt, für die gilt

$$\mathfrak{A} = (A, \leq^{\mathfrak{A}}) \models T \leftrightarrow \mathfrak{A} \text{ ist eine Wohlordnung.}$$

(Eine Wohlordnung $(A, \leq)$ ist eine lineare Ordnung, sodass es für jede nicht leere Teilmenge von A ein kleinstes Element gibt)

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +, 0)$. Zeigen Sie, dass es keine $(+, 0)$-Formel mit den freien Variablen x, y gibt, für die gilt

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} (a < b \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi_{x,y}[a, b]).$$

Aufgabe 4. Finden Sie eine Ableitung für folgende Regel:

$$\frac{\Gamma \phi \psi}{\Gamma \neg \psi \neg \phi}.$$

Aufgabe 5. **(a)** Seien $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursive Funktionen. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g(n) = \max\{f_1(n), f_2(n)\}$$

rekursiv ist.

(b) Seien $f(0) = 0, f(1) = 1$ und $f(n+2) = f(n+1) + 2f(n)$. Zeigen Sie, dass f rekursiv ist.

Aufgabe 6. Sei f eine rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass:

(a) Wenn $Q \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar ist, dann ist $f(Q)$ rekursiv aufzählbar.

(b) Wenn $A \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv ist, dann ist $f^{-1}(A)$ rekursiv aufzählbar.

Abgabe. Donnerstag, 30. Januar 2014, in der Vorlesung.

Besprechung. Donnerstag, 30. Januar 2014, in der Übung.