Übungsblatt 9

9.1. Beweise die Sobolev-Ungleichung (Satz 6.15) für $p = 1 < n \in \mathbb{N}$ auf Funktionen aus $C_0^1(\mathbb{R}^n)$. D.h., führe Schritt 1 des Beweises für beliebiges n durch.

9.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge und $1 \leqslant p < q < r \leqslant \infty$. Beweise, dass für alle $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ gilt:

(a) $f \in L^q(\Omega)$.

(b) Es existiert $C = C(p,q,r) > 0$, sodass

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^p(\Omega)}^{1-\theta}\|f\|_{L^r(\Omega)}^{\theta} \quad \text{mit} \quad \theta := \begin{cases} \dfrac{r(q-p)}{q(r-p)}, & r \neq \infty; \\ 1 - \dfrac{p}{q}, & r = \infty \end{cases} \in (0,1) \quad \text{gilt.}$$

Hinweis: Für $\alpha > 0$ betrachte $A_\alpha := \Big\{x \in \Omega : \big|f(x)\big| > \alpha\Big\}$. Finde den optimalen Wert von α.

9.3. Beweise die folgenden Korollare aus Satz 6.15 (Sobolev-Ungleichung):

(a) Für $1 \leqslant p < n$ und $p \leqslant q \leqslant p^* = \dfrac{np}{n-p}$ aus $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ folgt $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Es existiert $C(n,p,q) > 0$, sodass

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(n,p,q)\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ gilt.

(b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: aus $u \in W^{k+1,p}(\mathbb{R}^n)$ folgt $u \in W^{k,p^*}(\mathbb{R}^n)$.

Besprechung: Am Montag, den 14. 1. 2019.