Übungsblatt 7

7.1. Für $n \geqslant 2$ und $s \in (0, n-1)$ betrachte

$$v : B(0,1) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad v(x) := \begin{cases} |x|^{-s}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Beweise, dass die schwachen partiellen Ableitungen von v existieren und durch $v_{x_i}(x) = -s|x|^{-s-2}x_i$, $i = 1, \ldots, n$ gegeben sind.

(b) Beweise, dass $v \in W^{1,p}\big(B(0,1)\big)$ genau für $sp < n - p$ gilt.

7.2. Beweise, dass für $n > p \geqslant 1$ eine Funktion $f : B(0,1) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert mit $f \in W^{1,p}\big(B(0,1)\big)$ und f unbeschränkt auf jeder offenen Teilmenge $\Omega \subset B(0,1)$.

7.3. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachte

$$f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_\alpha(x) := \begin{cases} x^\alpha, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Wie viele schwachen Ableitungen besitzt f_α?

Besprechung: Am Montag, den 17. 12. 2018.