Mathematisches Institut der LMU
Prof. M. Napiórkowski
Dr. S. Morozov

Partielle Differentialgleichungen
WiSe 2018/19
30. 1. 2019

Übungsblatt 12

12.1. Sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1 \text{ und } x_3 > 0\}$ und $f \in C(\overline{\Omega})$. Finde die Greensche Funktion fürs Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u(x) = 0 & \text{für alle } x \in \partial\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\} \\ \partial_{x_3} u(x) = 0 & \text{für alle } x \in \partial\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\} \end{cases}.$$

12.2. Sei $\Omega := \{(x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)\}$. Bestimme die Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \Omega \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{für alle } t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{\pi}{2} - \left|x - \dfrac{\pi}{2}\right| & \text{für alle } x \in (0,\pi) \\ u_t(x,0) = \mathbf{1}_{[\pi/4,\,3\pi/4]}(x) & \text{für alle } x \in (0,\pi) \end{cases}.$$

12.3. Sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 2\}$.

(a) Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\nabla u = 0$ fast überall in Ω. Beweise, dass es $C \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $u = C$ fast überall in Ω gilt.

(b) Sei $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen aus $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \|\nabla u_j\|_{L^{7/3}(\Omega)} < \infty$. Beweise, dass es eine Teilfolge $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ existiert, die in $L^{10}(\Omega)$ einen Grenzwert besitzt.

12.4. Sei Ω eine beschränkte, offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Finde ein $A \in \mathbb{R}$, sodass für alle $\alpha > A$ das Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \nabla u\right)(x) = \partial_{x_1} \ln|x| & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

eine eindeutige schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ besitzt.

Besprechung: Am Montag, den 4. 2. 2019.