Übungsblatt 10

10.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen; $k \in C^1(\overline{\Omega})$, es existiert $k_0 > 0$ mit $k(x) \geqslant k_0$ für alle $x \in \Omega$; $a \in C(\overline{\Omega})$, $a(x) \geqslant 0$ für alle $x \in \Omega$. Beweise, dass

$$\langle u, v\rangle_H := \int_\Omega k(x)(\nabla u)(x)(\nabla v)(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega a(x)u(x)v(x)\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt in $H := W_0^{1,2}(\Omega)$ definiert, und dass H mit diesem Skalarprodukt ein Hilbertraum ist.

10.2. (a) Beweise, dass es genau ein stetiges lineares Funktional $\delta : W^{1,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ die Regel $\delta(u) := u(0)$ gilt.

(b) Finde ein $w \in W^{1,2}(\mathbb{R})$, sodass

$$\delta(u) = \langle w, u\rangle_{W^{1,2}(\mathbb{R})} = \int_\mathbb{R} \big((\nabla w)(x)(\nabla u)(x) + w(x)u(x)\big)\mathrm{d}x \quad \text{für alle } u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$$

gilt. Die Existenz und Eindeutigkeit von w folgen aus dem Darstellungssatz von Riesz (Satz 7.3).

10.3. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$V_k := \Big\{ v(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j :\ a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \Big\}$$

der Raum aller Polynome vom Grad $\leqslant k$ auf $(-1, 1)$. Für $k = 0, 1, 2$ berechne

$$\inf_{v \in V_k} E(v), \qquad E(v) := \int_{-1}^1 \Big(\big|v'(x)\big|^2 + \big|v(x)\big|^2 \Big)\mathrm{d}x - 2v(0),$$

und die entsprechenden Minimierer.

Besprechung: Am Montag, den 21. 1. 2019.