Mathematisches Institut der LMU
Prof. M. Napiórkowski
Dr. S. Morozov

Partielle Differentialgleichungen
WiSe 2018/19
23. 10. 2018

# Übungsblatt 1

**1.1.** Für kompakt getragenen $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ sei $u \in C^2\big(\mathbb{R} \times [0,\infty)\big)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} Lu := u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},\ t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Seien für $t \in [0,\infty)$

$$K(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_t^2(x,t)\,\mathrm{d}x, \qquad P(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Beweise, dass $K + P$ eine Konstantfunktion ist, und dass für alle $t$ groß genug $K(t) = P(t)$ gilt.

**1.2.** Seien $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ mit $f(x) = g(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_3(0,1)$, wobei $B_n(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ die Einheitskugel ist. Sei $u \in C^2\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$ eine Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = \Delta u(x,t) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3,\ t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1}$$

Beweise, dass für jede beschränkte Menge $G \subset \mathbb{R}^3$ ein $K \in \mathbb{R}_+$ existiert, sodass

$$\big|u(x,t)\big| < K/t \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3 \text{ und } t > 0$$

gilt.

**1.3.** Beweise für die Lösungen des Anfangswertproblems für die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = \Delta u(x,t) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2,\ t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,0) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{2}$$

die Poisson-Formel

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi t}\int_{B_2(x,t)} \frac{f(y) + tg(y) + \nabla f(y)\cdot(y-x)}{\big(t^2 - |y-x|^2\big)^{1/2}}\,\mathrm{d}y$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$.

*Hinweis:* Aus der Kirchhoff-Formel für die Lösungen und Anfangsbedingungen von (1), die nicht von $x_3$ abhängen, leite die Kirchhoff-Formel für die Lösungen von (2) her:

$$2\pi t^2\, u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t^2 \int_{B_2(x,t)} \frac{f(y)}{\big(t^2 - |y-x|^2\big)^{1/2}}\,\mathrm{d}y\right) + t^2 \int_{B_2(x,t)} \frac{g(y)}{\big(t^2 - |y-x|^2\big)^{1/2}}\,\mathrm{d}y.$$

**Besprechung:** Am Montag, den 29. 10. 2018.