Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. H. Siedentop
Dr. S. Morozov

Partielle Differentialgleichungen
WiSe 2017/18
27. 11. 2017

Übungsblatt 6

6.1. Beweisen Sie, dass für die Lösung des Anfangsrandwertproblems für die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx), \\ u_t(x,0) = g(x) = c \sum\limits_{n=1}^{\infty} n d_n \sin(nx), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

mit $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,\infty)$ die Energie

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \big(u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t)\big)\,\mathrm{d}x$$

eine konstante Funktion ist. Drücken Sie E durch $\{c_n, d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus.

6.2. Sei μ ein Borel-Maß auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$T_\mu : \mathfrak{D}(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad T_\mu(\varphi) := \int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

genau dann eine Distribution in $\mathfrak{D}'(\Omega)$ definiert, wenn μ lokal endlich ist, d.h., jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ endliches Maß $\mu(K)$ hat.

6.3. Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung in $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ der Distribution, die der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} \sin x, & x \in \big[0, \pi/2\big], \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

entspricht.

Besprechung: Am Montag, den 4. 12. 2017.