Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. H. Siedentop
Dr. S. Morozov

Partielle Differentialgleichungen
WiSe 2017/18
22. 01. 2018

Übungsblatt 11

11.1. (a) Berechnen Sie die Fourier-Transformation der Indikatorfunktion des Intervalls $[-1,1]$ in $\mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie die Fourier-Transformation von $f(x) = (\sin^2 x)/x^2$ auf $\mathbb{R}$.

11.2. (a) Für $p \in [1,2]$ sei f eine beschränkte radiale Funktion aus $L^p(\mathbb{R}^3)$, d. h. $f(\mathbf{x}) = f\big(|\mathbf{x}|\big) \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Beweisen Sie, dass die Fourier-Transformation von f sich als

$$(\mathcal{F}f)(\mathbf{p}) = (\mathcal{F}f)\big(|\mathbf{p}|\big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{|\mathbf{p}|}\lim_{R\to\infty}\int_0^R r\sin\big(|\mathbf{p}|r\big)f(r)\mathrm{d}r$$

berechnen lässt.

(b) Berechnen Sie die Fourier-Transformation in $\mathbb{R}^3$ der Grundzustandseigenfunktion des Wasserstoffatoms $g(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{-|\mathbf{x}|}$.

11.3. Berechnen Sie die Fourier-Transformationen der folgenden temperierten Distributionen (x ist die unabhängige Variable):

(a) $1/(x-c)$, $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ in $\mathfrak{S}'(\mathbb{R})$.

(b) Heaviside-Funktion $1_{(0,\infty)}$ in $\mathfrak{S}'(\mathbb{R})$. *Hinweis:* Betrachten Sie die Ableitung!

(c) $\partial^\alpha \delta_0$ in $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^d)$ mit $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.

(d) x^α in $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^d)$ mit $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.

Besprechung: Am Montag, den 29. 01. 2018.