HAUSAUFGABENBLATT #12

Die Hausaufgaben sind nicht teil der Endnote.
Die Lösungen werden in dem Tutorium #11 besprochen.

Aufgabe 42. Unter der Annahme einer zur Individuenzahl proportionalen Wachstumsrate, die durch limitierte Ressourcen K beschränkt ist, lässt sich die Differentialgleichung

$$\dot{N}(t) = \mu \cdot N(t)\,(K - N(t)) \tag{1}$$

aufstellen. Man bestimme die Funktion $N(t)$ unter der Bedingung, dass die Population zum Zeitpunkt $t = 0$ den Wert N_0 besitzet. (Hinweise: Separation der Variablen und Partialbruchzerlegung zur Lösung des Integrals)

Aufgabe 43. Fügt man der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators einen Reibungsterm $F_R = -b \cdot v$ hinzu, so ergibt sich die Differentialgleichung

$$\ddot{s}(t) + 2\gamma\dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = 0, \tag{2}$$

mit den Bezeichnungen $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ und $\gamma = \frac{b}{2m}$.Wie lautet die zugehörige Lösung, welche die Anfangsbedingungen $s(0) = s_0$ und $v(0) = v_0$ erfüllt im Fall starker ($\gamma > \omega_0$) und schwacher ($\gamma < \omega_0$) Reibung?

Aufgabe 44. Für den statistischen Zerfall redioaktiver Stoffe gilt, dass die Zahl der Zerfälle proportional zur Stoffmenge ist. Hieraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$\dot{N}(t) = -\mu \cdot N(t). \tag{3}$$

Welche Stoffmenge ist zum Zeitpunkt t, unter der Annahme, dass die Ausgangsmenge zum Zeitpunkt $t = 0$ N_0 betrug, noch vorhanden?
Die Halbwertszeit (die Zeit bis die Hälfte des Stoffes zerfallen ist) des radioaktiven Isotops welches zur C14-Datierung verwendet wird beträgt $T_{\frac{1}{2}} = 5730 \text{ a} = 1.8 \cdot 10^{11}$ s. Wie lautet der zugehörige Proportinalitätsfaktor μ?
Ein lebender Organismus verbaut in einem festen Verhältnis ν_0 Kohlenstoff und sein instabiles Isotop. Nach seinem Tod endet dieser Vorgang. Man leite hiermit unter Berücksichtigung der vorherigen Ergebnisse eine Formel zur Bestimmung des Todeszeitpunkts in Abhängigkeit des Isotopenverhältnisses ν her.