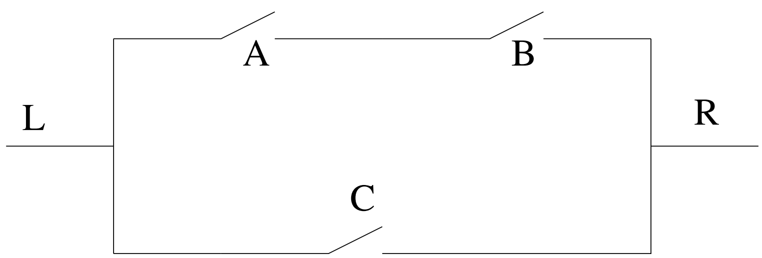
Übungsklausur

Nachfolgend stehen die Original-Prüfungsaufgaben zur Stochastikklausur des Wintersemesters 2007/08. Sie sind nun zum Üben zu Hause unter simulierten Klausurbedingungen gedacht und werden weder in den Übungen besprochen noch korrigiert, noch werden Musterlösungen herausgegeben. Die Bearbeitungszeit betrug 120 Minuten.

Aufgabe 1: Im folgenden elektrischen Schaltnetz seien die Schalter A, B und C unabhängig voneinander jeweils mit Wahrscheinlichkeit p stromdurchlässig.



Mit welcher Wahrscheinlichkeit q kann Strom vom linken Ende L zum rechten Ende R des Netzwerks fließen? Schreiben Sie die Antwort in der Form

$$q = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$$

in folgendes Feld:

Antwort (2 Punkte):

$q =$

Begründung (2 Punkte):

Aufgabe 2: Eine Urne enthält ursprünglich eine rote und eine blaue Kugel. Man entnimmt zufällig eine Kugel und legt sie zusammen mit einer neuen Kugel der gleichen Farbe zurück in die Urne. Dann entnimmt man zufällig eine weitere Kugel und legt sie zusammen mit einer weiteren neuen Kugel der gleichen Farbe zurück in die Urne. Schließlich entnimmt man zufällig eine dritte Kugel. Wir beobachten, dass unter den drei gezogenen Kugeln eine rot und zwei blau sind. Bedingt auf diese Beobachtung, mit welcher Wahrscheinlichkeit p stammt die rote gezogene Kugel aus dem ersten Zug? Schreiben Sie die Antwort als gekürzten Bruch in folgendes Feld:

Antwort (2 Punkte):

$$p = \boxed{}$$

Begründung (2 Punkte):

Aufgabe 3: Es seien $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ und $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ die Gleichverteilung auf dem Dreieck $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\}$. Weiter bezeichnen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die erste bzw. zweite Koordinate. Berechnen Sie die Covarianz $\mathrm{Cov}_P(X, Y)$ zwischen X und Y. Schreiben Sie die Antwort als gekürzten Bruch in folgendes Feld:

Antwort (2 Punkte):

$$\mathrm{Cov}_P(X,Y) = \boxed{}$$

Begründung (2 Punkte):

Aufgabe 4: Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine iid Folge von Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Die Zufallsvariable X_1 besitze die Dichte $f(x) = 1_{[0,\infty[}(x)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, bezüglich des Lebesguemaßes. Weiter sei eine Zahl $a > 1$ gegeben. Leiten Sie aus der exponentiellen Tschebyscheff-Ungleichung eine *möglichst kleine* obere Schranke für

$$q_n(a) := P[X_1 + \ldots + X_n \geq na], \quad n \in \mathbb{N}$$

her. Folgern Sie daraus eine *möglichst kleine* obere Schranke für

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log q_n(a).$$

Schreiben Sie die Antwort in folgendes Feld:

Antwort (2 Punkte):

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log q_n(a) \leq \boxed{}$$

Begründung (2 Punkte):

Aufgabe 5: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ein statistisches Modell, $H_0 = \{P_0\} \subset \mathcal{P}$ eine einfache Nullhypothese, $H_1 = \{P_1\} \subset \mathcal{P}$ eine davon verschiedene einfache Alternative, so dass P_1 bezüglich P_0 eine Dichte $L = dP_1/dP_0$ besitzt. Wir nehmen an, dass die Verteilung $\mathcal{L}_{P_0}(L)$ des Likelihood-Quotienten L bezüglich P_0 eine Dichte f bezüglich des Lebesguemaßes besitzt. Es bezeichne $p : \Omega \to \mathbb{R}$ den p-Wert der Likelihood-Quotienten-Tests (Neyman-Pearson-Tests) zu diesen beiden Hypothesen. Welche der folgenden Aussagen A-E ist in jedem Fall richtig? (*Hinweis:* Es ist genau eine der fünf Aussagen.)

A Die Verteilung $\mathcal{L}_{P_0}(p)$ des p-Werts bezüglich der Nullhypothese besitzt die Dichte f bezüglich des Lebesguemaßes.

B Die Verteilung $\mathcal{L}_{P_1}(p)$ des p-Werts bezüglich der Alternative besitzt die Dichte f bezüglich des Lebesguemaßes.

C Der p-Wert ist bezüglich der Nullhypothese auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$ uniform verteilt.

D Der p-Wert ist bezüglich der Alternative auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$ uniform verteilt.

E Keine der Aussagen A-D ist richtig.

Schreiben Sie die Antwort in folgendes Feld:

Antwort (2 Punkte):

Die Aussage $\boxed{}$ ist in jedem Fall richtig.

Begründung (2 Punkte):

Aufgabe 6: Es seien X und Y zwei unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen, die nicht den Wert 0 annehmen. Berechnen Sie eine Dichte f der Verteilung der Zufallsvariable

$$Z = \frac{X^2}{X^2 + Y^2}$$

bezüglich des Lebesguemaßes.
Hinweis: Es empfiehlt sich, zuerst die gemeinsame Dichte von (X^2, Y^2) und dann die gemeinsame Dichte von $(Z, X^2 + Y^2)$ zu bestimmen.

Schreiben Sie die Antwort in folgendes Feld:

Antwort (2 Punkte):

$f(z) = \boxed{}$, $z \in \mathbb{R}$.

Begründung (2 Punkte):