

Übungen zur Mathematischen Statistik Blatt 9

1. Ein Beispiel zum Neyman–Pearson–Lemma im Kontinuum.

- (a) Gegeben seien $n \geq 2$ unabhängige normalverteilte Datenpunkte X_1, \dots, X_n mit bekanntem Erwartungswert 0 und unbekannter Varianz σ^2 . Konstruieren Sie einen (nichtrandomisierten) Test mit maximaler Macht zur Nullhypothese $H_0 : \sigma^2 = 1$ und der Alternative $H_A : \sigma^2 = \frac{1}{4}$ zu gegebenem Niveau $\alpha \in]0, 1[$. Zeigen Sie, dass der Verwerfungsbereich V eines solchen Tests bis auf eine H_0 -Nullmenge die Form $V = \{\chi^2 \leq c\}$ mit der Teststatistik $\chi^2 := \|(X_1, \dots, X_n)\|_2^2$ und einem geeigneten kritischen Wert c besitzt.
- (b) Es sei $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2$ die empirische Varianz der Daten, wobei \bar{X} das Mittel der Datenpunkte bezeichnet. Es sei $\tilde{V} = \{s^2 \leq \tilde{c}\}$ der Verwerfungsbereich eines weiteren Tests, wobei der kritische Wert \tilde{c} so gewählt sei, dass er ebenfalls das Niveau α besitzt. Überzeugen Sie sich im Fall $n \geq 3$, dass dieser Test eine strikt kleinere Macht als der Test aus der vorhergehenden Teilaufgabe besitzt.

2. **Ein Beispiel zum Neyman–Pearson–Lemma im Diskreten.** In einer schriftlichen Prüfung, an der sehr viele Kandidaten teilnahmen, gab es drei multiple-choice-Aufgaben. Aufgabe Nr. n wurde von folgendem Anteil p_n der Kandidaten richtig beantwortet:

n	1	2	3
p_n	10%	20%	40%

Wir wollen testen, ob der Kandidat Fritz signifikant besser (z. B. “doppelt so gut”) war. Dazu machen wir die Modellannahme, dass Fritz eine (unbekannte) Wahrscheinlichkeit q_n hatte, die Aufgabe Nr. n richtig zu beantworten, unabhängig für die verschiedenen Aufgaben.

Nullhypothese: $q_n = p_n$ für $n = 1, 2, 3$.

Alternativhypothese: $q_n = 2p_n$ für $n = 1, 2, 3$.

- (a) Konstruieren Sie hierzu einen randomisierten Test zum 10%-Niveau mit maximaler Macht, der als Eingabedaten verwenden soll, *welche* Aufgaben Fritz richtig beantwortete. Welche Macht hat dieser Test?
- (b) Konstruieren Sie einen weiteren randomisierten Test zum 10%-Niveau mit maximaler Macht, der aber nur verwenden darf, *wie viele* Aufgaben Fritz richtig beantwortete. Berechnen Sie auch die Macht dieses Tests. Vergleichen Sie die Macht der beiden Tests.
- (c) Fritz hat genau die ersten beiden Aufgaben richtig beantwortet. Wie lautet das Ergebnis der beiden Tests? Interpretieren Sie die Resultate!

Keine Abgabe. Studierende sollen ihre Lösungen in der Übungsstunde 10 präsentieren.